MÁXIMO MITACC

LUIS TORO

TÓPICOS DE CÁLCULO

VOLUMEN 1

TERCERA EDICIÓN

www.FreeLibros.com

TOPICOS DE CALCULO
VOL. I

- NUMEROS REALES
- RELACIONES Y FUNCIONES
- LIMITES
- CONTINUIDAD
- DERIVADAS
- TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES
- APLICACIONES DE LA DERIVADA
- FUNCIONES TRASCENDENTES
- FORMAS INDETERMINADAS Y FUNCIONES HIPERBOLICAS
- ECUACIONES PARAMETRICAS

MAXIMO MITACC MEZA - LUIS TORO MOTA

www.FreeLibros.com

TOPICOS DE CALCULO
VOL. I

TERCERA EDICION

MAXIMO MITACC - LUIS TORO MOTA

IMPRESO EN EL PERU   PRINTED IN PERU

Prohibida la reproducción total o parcial por todos los medios gráficos, sin permiso de los autores.

Número de Inscripción en le Registro Nacional
de Derechos de Autor Nº 151

Impreso en los Talleres Gráficos de:
Editorial THALES S.R.L.

TERCERA EDICION Junio del 2009

PROLOGO

En esta tercera edición de Tópicos de Cálculo Vol. I, nos hemos esforzado por presentar el cálculo diferencial, en forma tal que resulte de máximo provecho a los estudiantes cuyo campo de especialización no sea estrictamente las matemáticas. La orientación principal del libro es hacia aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, lo cual amplía la utilidad del texto.
Aunque en esta edición la estructura básica general no se ha cambiado, se ha realizado una gran cantidad de revisiones. Hemos reestructurado casi la totalidad del capitulo 1 y el capitulo 5, se han hecho una gran cantidad de modificaciones a lo largo de todo el libro, los cuales consisten en ejemplos adicionales desarrollados y redacción de procedimientos. El conjunto de ejercicios propuestos se han modificado, con la adición de nuevos ejercicios.

El Libro se divide en 10 capitulos. En el primero se hace una presentación axiomática de los números reales destacando sus propiedades esenciales; en los capitulos siguientes (del segundo al noveno), se desarrolla tópicos sobre funciones, el concepto y el cálculo de limites, continuidad de funciones, el concepto y el cálculo de las derivadas, aplicaciones de la derivada y limite de funciones que presentan formas indeterminadas; en el último, se trata las ecuaciones paramétricas de una curva.

Nuestro propósito es que esta edición no tenga errores, pero es casi un axioma que todo libro de Matemática los presente; por tal motivo consideramos que este texto no sea la excepción, a pesar del esmero y la dedicación puesta para detectarlos y corregirlos antes de su impresión. En tal sentido, los autores compartimos la responsabilidad de los mismos, aclarando que dichos errores han sido cometidos solamente por uno de los autores.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los profesores y alumnos de todo el país por la acogida brindada a las ediciones anteriores y esperamos que esta nueva edición tenga la misma preferencia.

Los Autores

www.FreeLibros.com

INDICE

CAPITULO 1: NUMEROS REALES

Sistema de los Números Reales (ℝ)........ 1
Desigualdades e Intervalos 6
Inecuaciones........ 8
Valor Absoluto........ 12
Axioma del Supremo........ 17
Inducción Matemática........ 19

CAPITULO 2: RELACIONES Y FUNCIONES

Relaciones........ 37
Dominio y Rango de una Relación........ 38
Relación Inversa........ 40
Funciones........ 42
Funciones Especiales........ 48
Función Par y Función Impar........ 54
Función Creciente y Función Decreciente........ 56
Función Inyectiva, Suryectiva y Biyectiva........ 57
Operaciones con Funciones........ 59
Composición de Funciones........ 60
Función Inversa........ 63
Funciones de Costo, Ingreso y Utilidad........ 67
Funciones de Oferta y Demanda........ 68

CAPITULO 3: LIMITES

Vecindad de un Punto........ 109
Limite de una Función........ 110
Propiedades de los Limites........ 118
Limites Laterales........ 134
Limites al Infinito........ 141
Limites Infinitos........ 143
Asintotas........ 158

www.FreeLibros.com

CAPITULO 4: CONTINUIDAD

Noción Intuitiva de Función Continua.................................. 173
Definición de Función Continua.. 174
Continuidad de Funciones en Intervalos................................ 189
Propiedades de las Funciones Continuas en Intervalos Cerrados 194

CAPITULO 5: DERIVADAS

Derivada de una Función en un Punto.................................. 197
Interpretación Geométrica de la derivada.............................. 199
Derivadas Laterales.. 200
Recta Tangente y Recta Normal a una Curva en un Punto.......... 204
Reglas de Derivación.. 206
Regla de la Cadena o Derivada de una Función Compuesta........ 209
Derivadas de Orden Superior... 222
Derivación Implícita... 227
Diferenciales... 235

CAPITULO 6: TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

Valores Máximos y Mínimos de una Función........................... 243
Teorema de Rolle.. 246
Teorema del Valor Medio (o de Lagrange)............................. 250
Fórmulas de Taylor y Maclaurin... 255

CAPITULO 7: APLICACIONES DE LA DERIVADA

Funciones Monótonas.. 261
Problemas de Aplicación de Máximos y Mínimos...................... 278
Concavidad y Puntos de Inflexión.. 290
Condiciones Suficientes para la Concavidad, Puntos de Inflexión y Valores Extremos con la derivada n-ésima.......................... 297
Trazado de la Gráfica de una Función.................................... 299
Interpretación Cinemática de la Derivada................................ 309
Razón de Cambio.. 310
Aplicaciones de las derivadas a la Economía.......................... 317
Método de Newton para determinar las Raíces Reales de $f(x) = 0$ 322

CAPITULO 8: FUNCIONES TRASCENDENTES

Funciones Trigonométricas.. 325
Funciones Trigonométricas Inversas...................................... 332
Límites Trigonométricos.. 336
Algunos Límites de las Funciones Trigonométricas Inversas....... 338
Derivadas de las Funciones Trigonométricas........................... 344
Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas............... 355
Función Exponencial de Base a... 364
Función Logaritmo General de Base a.................................. 365
El Número e... 368
Límites de la Forma: $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ 373
Derivada de las Funciones: Exponencial y Logarítmica.............. 379

CAPITULO 9: FORMAS INDETERMINADAS Y FUNCIONES HIPERBOLICAS

Teorema de Cauchy – Reglas de L'Hôpital............................... 395
Formas Indeterminadas Reductibles a: $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ 402
Funciones Hiperbólicas.. 408
Derivadas de las Funciones Hiperbólicas................................ 411
Funciones Hiperbólicas Inversas.. 424
Relaciones entre las Funciones Hiperbólicas Inversas y las Logarítmicas... 427
Derivada de las Funciones Hiperbólicas Inversas...................... 428

CAPITULO 10: ECUACIONES PARAMETRICAS

Ecuaciones Paramétricas de una Curva.................................. 435
Derivada de una Función dada Paramétricamente..................... 439

www.FreeLibros.com

1 NÚMEROS REALES

1.1 SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

Un conjunto no vacío de vital importancia es el conjunto de los **números reales**, que es representado por $\mathbb{R}$. El **sistema de los números reales** es el conjunto $\mathbb{R}$ provisto de dos operaciones **adición** (+) y **multiplicación** (·), de una relación de **orden** (<) que se lee **menor** y de un axioma llamado **axioma del supremo**. El sistema de los números reales se denota con ($\mathbb{R}$; +; · ; <), pero por simplicidad se usa la notación $\mathbb{R}$. Cada elemento $x \in \mathbb{R}$ se llama **número real**.

1.1.1 ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La adición y multiplicación de números reales son dos operaciones internas en $\mathbb{R}$ y se definen como sigue.

Adición. A cada par $(a; b)$ de números reales se asocia un único número real c, llamado **suma** de a y b, y se escribe $c = a + b$.

Multiplicación. A cada par $(a; b)$ de números reales se asocia un único número real d, llamado **producto** de a y b, y se escribe $d = a \cdot b$.

La adición y multiplicación de números reales satisfacen los siguientes axiomas:

A_1 $a + b = b + a,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (conmutatividad)

A_2 $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociatividad)

A_3 Existe el número real **cero**, denotado por 0, tal que $a + 0 = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

A_4 Para cada número real a existe un número real llamado **opuesto** de a y es representado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$

M_1 $ab = ba,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (conmutatividad)

M_2 $(ab)(c) = (a)(bc),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociatividad)

M_3 Existe el número real **uno**, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

M_4 Para cada número real a diferente de 0, existe un número real llamado **inverso** de a y se denota por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

D $a(b + c) = ab + ac,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (Distributividad)

www.FreeLibros.com

Las propiedades de estas dos operaciones se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema 1

a) Los números reales $0, 1, -a$ y a^{-1} son únicos.

b) $a = -(-a), \ \forall a \in \mathbb{R}$

c) Si $a \neq 0, \ a = (a^{-1})^{-1}$

d) $a \cdot 0 = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

e) $-a = (-1)a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

f) $a(-b) = (-a)(b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

g) $(-a)(-b) = ab, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

h) Si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

i) Si $ac = bc$ y $c \neq 0 \Rightarrow a = b$

j) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

k) $ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$

l) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

Demostración. Solamente demostraremos algunas de las propiedades, dejando al lector la demostración de las demás.

a) Supongamos que existan 0 y 0′ tales que

$$a + 0 = a, \ \forall a \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ a + 0' = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Entonces, $0' = 0' + 0$ (0 es el cero de $\mathbb{R}$)

$= 0 + 0'$ (conmutatividad)

$= 0$ (0′es el cero de $\mathbb{R}$)

Luego, $0 = 0'$.

d) $a(0) = a(0 + 0)$ $(0 = 0 + 0)$

$= a \cdot 0 + a \cdot 0$

Luego, $a \cdot 0 = 0$ (unicidad del cero)

j) ($\Rightarrow$) Si $a \cdot b = 0$. Supongamos que $a \neq 0$ (probaremos que $b = 0$), entonces

$a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1}(0) \Rightarrow (a^{-1} \cdot a)b = 0 \Rightarrow (1)b = 0.$

Por tanto, $b = 0$.

($\Leftarrow$) Si $a = 0 \vee b = 0$, entonces $ab = 0$ (por d).

1.1.2 SUSTRACCIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES

Sustracción. Si a y b son dos números reales, la **diferencia** de a y b es

$$a - b = a + (-b)$$

División o Cociente. Si a y b son dos números reales, con $b \neq 0$, el **cociente** de a y b es

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1})$$

Teorema 2

a) $a - b = -(b - a)$

b) $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$

c) Si $b \neq 0, \ c = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow bc = a$

d) $a(b - c) = ab - ac$

e) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

Demostración. (ejercicio para el lector)

1.1.3 RELACIÓN DE ORDEN

Axioma 1. En $\mathbb{R}$ existe un subconjunto denotado por $\mathbb{R}^+$, llamado **reales positivos**, que satisface las siguientes condiciones:

01. Cada $a \in \mathbb{R}$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$a \in \mathbb{R}^+, \ -a \in \mathbb{R}^+, \ a = 0.$$

02. Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $ab \in \mathbb{R}^+$.

Definición 1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que a es **menor** que b y se denota por $a < b$, si y solo si $b - a \in \mathbb{R}^+$.

Si $a < b$, también se escribe $b > a$ y se lee "b es **mayor** que a".

De la definición se deduce:

$$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 0 < a \Leftrightarrow a > 0 \ \text{ y } \ \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} / a > 0\}$$

Se dice que a es **menor o igual** que b y se escribe $a \leq b$, si y solo si $a < b$ o $a = b$. En este caso, también se dice que b es **mayor o igual** que a y se escribe $b \geq a$.

www.FreeLibros.com

Teorema 3

a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sólo una de las condiciones siguientes se verifica.
$a = b$ ó $a < b$ ó $b < a$ (Ley de tricotomía)

b) $a^2 \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

c) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$ (Ley transitiva)

d) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$
(Ley de monotonía para la suma)

e) Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

f) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

g) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

h) Si $a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

i) Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$. Si $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$
(a y a^{-1} tienen el mismo signo)

j) Si $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0$. Si $a < b < 0 \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

k) $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0$ y $b > 0)$ ó $(a < 0$ y $b < 0)$
$(ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0$ y $b \geq 0)$ ó $(a \leq 0$ y $b \leq 0)$

l) $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ y $b < 0)$ ó $(a < 0$ y $b > 0)$
$[ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0$ y $b \leq 0)$ ó $(a \leq 0$ y $b \geq 0)]$

m) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

n) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ y $b = 0$

Demostración.

a) Si $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}$. Luego, solo una de las siguientes condiciones se cumple: $a - b \in \mathbb{R}^+$ ó $-(a - b) \in \mathbb{R}^+$ ó $a - b = 0$.
Entonces, $a - b > 0$ ó $b - a > 0$ ó $a = b$.
Ello es equivalente a: $a > b$ ó $b > a$ ó $a = b$.

f) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}^+$
$\Rightarrow (b - a)c \in \mathbb{R}^+$
$\Rightarrow (bc - ac) \in \mathbb{R}^+$
$\Rightarrow bc - ac > 0$
$\Rightarrow ac < bc$.

k) Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow ab > 0$. También, si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $-a > 0$ y $-b > 0$ y $ab = (-a)(-b) > 0$.
Por otro lado, si $ab > 0 \Rightarrow a \neq 0$ y $b \neq 0$ (teorema 1-k).
Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ y $b = a^{-1}(ab) > 0$. Análogamente, si $a < 0$ $\Rightarrow a^{-1} < 0$ y $b = a^{-1}(ab) < 0$.

La demostración de las otras propiedades queda como ejercicio para el lector.

www.FreeLibros.com

OBSERVACIÓN 1. *Si a y b son dos números reales tales que $a^2 = b$, se dice que a es la **raíz cuadrada** de b y se escribe $a = \sqrt{b}$. Por ejemplo, 2 y −2 son raíces cuadradas de 4, pues $(-2)^2 = 2^2 = 4$. En lo que sigue, la notación $\sqrt{b}$ indicará la **raíz cuadrada positiva** y $-\sqrt{b}$, la **raíz cuadrada negativa**. De esta manera, $\sqrt{4} = 2$ y $-\sqrt{4} = -2$.*

*Si $b < 0$, por el teorema 3 (b), no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = b$. En otras palabras, **no existe raíz cuadrada de los números negativos**.*

En el caso que $a^2 = 0$, se deduce que $a = 0$. Por tanto, $\sqrt{0} = 0$.

En lo que sigue, por "resolver la ecuación $E(x) = 0$", donde $E(x)$ es una expresión algebraica, se entenderá que es determinar todos los números reales que satisfacen dicha ecuación.
Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 6 = 0$ se obtiene $x = 2$, porque $3(2) - 6 = 0$. Por otro lado, la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución (en $\mathbb{R}$), pues $x^2 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $3x + 2 = 4 - x$ b) $x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$ d) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

Solución

a) $3x + 2 = 4 - x \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = 1/2$.

b) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \ \vee \ x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 3$. (Teorema 1- j)

Otro método (completando cuadrados)

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x - 1 = -2 \ \vee \ x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 3$.

c) $x^4 - 13x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 12)(x^2 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow (x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})(x - 1)(x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \ \vee \ x = -2\sqrt{3} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1$.

d) Aplicando Ruffini se tiene: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2)(x^2 - x - 1) = 0$
Luego, $x - 2 = 0 \ \vee \ x^2 - x - 1 = 0$

$$x = 2 \ \vee \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4(1)}}{2}$$

Por tanto, $x = 2 \ \vee \ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1.2 DESIGUALDADES E INTERVALOS

Los números reales se identifican con los puntos de una recta. Esta identificación se realiza del siguiente modo:

Dada una recta L (por conveniencia horizontal) y una unidad de medida arbitraria, fijamos un punto 0 de la recta y a éste se identifica con el número cero. Luego, a cada número real x se identifica con el punto que está situado a x unidades a la derecha de 0 si $x > 0$ y con el punto situado a $-x$ unidades a la izquierda de 0 si $x < 0$ (Fig. 1.1).

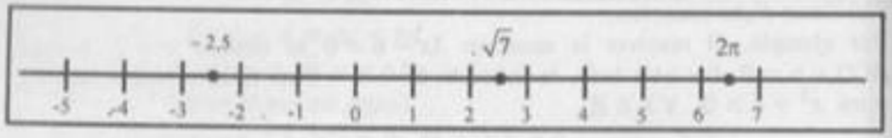


Fig. 1.1

Esta correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta es biunívoca, es decir, a cada número real le corresponde un único punto y a cada punto le corresponde un único número real. En lo que sigue, no se hará ninguna diferencia entre ambos elementos (punto y número).

Teniendo en cuenta esta identificación, si x e y son dos números reales tales que $x < y$, entonces x está a la izquierda de y , a una distancia de $y - x$ unidades (Fig. 1.2)

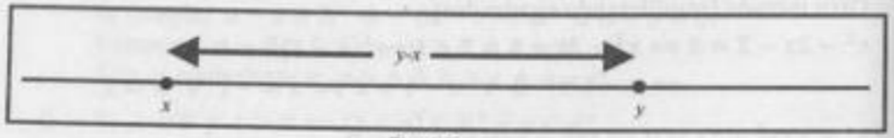


Fig. 1.2

Una expresión que contiene relaciones como $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ es llamada una **desigualdad.** Así:

a) $x < y < z$ significa $x < y \wedge y < z$

b) $x < y \leq z$ significa $x < y \wedge y \leq z$

c) $x \leq y < z$ significa $x \leq y \wedge y < z$

d) $x \leq y \leq z$ significa $x \leq y \wedge y \leq z$

www.FreeLibros.com

Dados los números reales a y b con $a < b$, los intervalos son ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ y pueden ser:

INTERVALOS FINITOS

Intervalo abierto: $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ (Fig. 1.3)

Intervalo cerrado: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$ (Fig. 1.4)

Intervalo semiabierto: $[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$ (Fig. 1.5)

$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$ (Fig. 1.6)

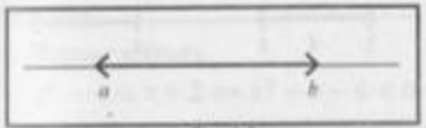


Fig. 1.3

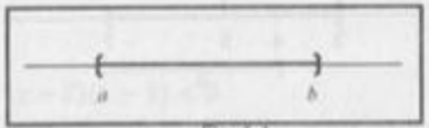


Fig. 1.4

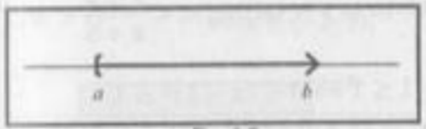


Fig. 1.5

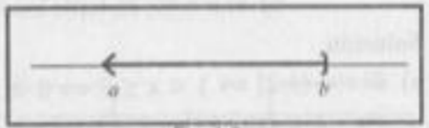


Fig. 1.6

INTERVALOS INFINITOS

$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$ (Fig. 1.7)

$\langle -\infty; a\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$ (Fig. 1.8)

$[a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$ (Fig. 1.9)

$\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$ (Fig. 1.10)

$\langle -\infty; +\infty\rangle = \mathbb{R}$

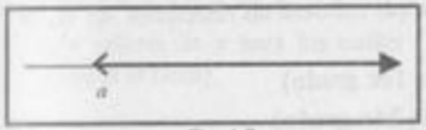


Fig. 1.7

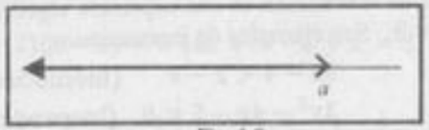


Fig. 1.8

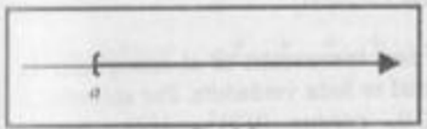


Fig. 1.9

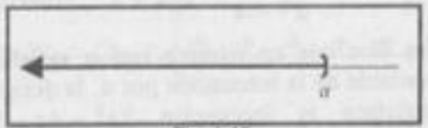
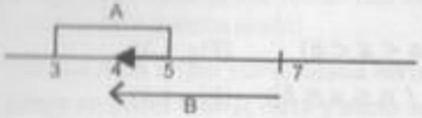
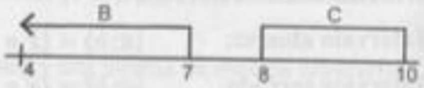


Fig. 1.10

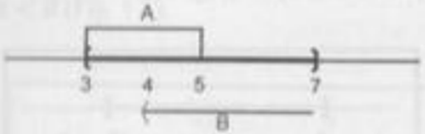
Ejemplo 2. Dados los intervalos $A=[3;5]$, $B=\langle 4;7]$ y $C=[8;10]$, entonces:

a) $A\cap B=\langle 4;5]$ b) $B\cap C=\emptyset$





c) $A\cup B=[3;7]$ d) $A\cup C=[3;5]\cup[8;10]$



Ejemplo 3. a) Si $x\in\langle 1;2]$, pruebe que $x^2-2x\in\langle -1;0]$.

b) Si $x\in\langle 0;2\rangle$, halle los números m y M tal que $m<\dfrac{x+2}{x+5}<M$.

Solución

a) Si $x\in\langle 1;2]\Leftrightarrow 1<x\leq 2\Leftrightarrow 0<x-1\leq 1\Leftrightarrow 0<(x-1)^2\leq 1$

$\Leftrightarrow -1<(x-1)^2-1\leq 0\Leftrightarrow -1<x^2-2x\leq 0\Leftrightarrow x^2-2x\in\langle -1;0]$

b) Si $x\in\langle 0;2\rangle\Rightarrow 0<x<2\Leftrightarrow 5<x+5<7\Leftrightarrow \dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{x+5}<\dfrac{1}{5}$ (I)

También se verifica $2<x+2<4$. (II)

Multiplicando las desigualdades (I) y (II) (teorema 3-h), se obtiene:

$\dfrac{2}{7}<\dfrac{x+2}{x+5}<\dfrac{4}{5}$. Por tanto, $m=\dfrac{2}{7}$ y $M=\dfrac{4}{5}$

1.3 INECUACIONES

Una **inecuación** es una expresión algebraica que contiene las relaciones $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Son ejemplos de inecuaciones:

$3x-4<2-x$ (Inecuación de 1er. grado)

$3x^2-4x-5\leq 0$ (Inecuación de 2do. grado)

$\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\geq x+2$ (Inecuación racional)

Se dice que un número real a **satisface una inecuación** si al reemplazar la variable de la inecuación por a, la desigualdad se hace verdadera. Por ejemplo, 2 satisface la inecuación $3x^2-4x-5\leq 0$, porque $3(2)^2-4(2)-5\leq 0$; mientras que 4 no satisface la inecuación $3x-20>0$, porque $3(4)-20<0$.

www.FreeLibros.com

El conjunto de todos los números que satisfacen una inecuación se llama **conjunto solución**, y resolver una inecuación significa hallar su conjunto solución.

Ejemplo 4. Exprese en intervalos el conjunto solución de $3x-4<2+x$.

Solución

$3x-4<2+x\Leftrightarrow 2x<6\Leftrightarrow x<3$

Luego, el conjunto solución es $C.S.=\langle -\infty;3\rangle$.

Ejemplo 5. Resuelva la inecuación $x^2-4<x+2$.

Solución

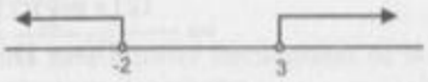
a. **Primer método**

$x^2-4<x+2\Leftrightarrow x^2-x-6<0\Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0$

$\Leftrightarrow (x+2>0\wedge x-3<0)$ ó $(x+2<0\wedge x-3>0)$

$\Leftrightarrow (x>-2\wedge x<3)$ ó $(x<-2\wedge x>3)$

$\Leftrightarrow x\in\langle -2;3\rangle$.



b. **Segundo Método** (Completando cuadrados)

$x^2-4<x+1\Leftrightarrow x^2-x<6\Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}<6+\dfrac{1}{4}$

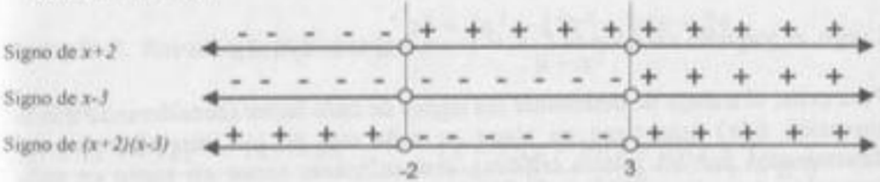
$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}<x-\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow -2<x<3\Leftrightarrow x\in\langle -2;3\rangle$.

c. **Tercer Método** (Método de los **puntos críticos**)

$x^2-4<x+2\Leftrightarrow x^2-x-6<0\Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0$

Los valores de x para los cuales $(x+2)(x-3)=0$ son $x=-2$ y $x=3$ (puntos críticos).



En el último diagrama se observa que $(x+2)(x-3)<0$, si $x\in\langle -2;3\rangle$.

OBSERVACIÓN 2. *(Regla para determinar el signo de un producto ó de un cociente)*

a) *Para determinar el signo de $x - a$, se tiene en cuenta lo siguiente:*
Signo de $x - a$ es $+ \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a \Leftrightarrow x$ está a la derecha de a.
Signo de $x - a$ es $- \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a \Leftrightarrow x$ está a la izquierda de a.

b) *Para determinar el signo de un producto, se considera las reglas*
$$(+)(+) = + \,;\ (-)(-) = + \,;\ (+)(-) = - \,;\ (-)(+) = -$$
Resultado similar se obtiene para el cociente.

Ejemplo 6. Resuelva la inecuación $\dfrac{x+4}{x-7} < \dfrac{x}{x+1}$.

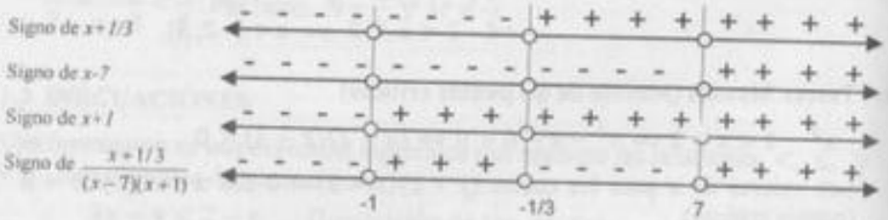
Solución

Usaremos el método de los puntos críticos.

$$\frac{x+4}{x-7} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-7} - \frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+4)((x+1) - x(x-7)}{(x-7)(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-7)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-7)(x+1)} < 0$$

Los puntos críticos son los valores de x que hacen cero al numerador y al denominador de $E(x) = \dfrac{x+\frac{1}{3}}{(x-7)(x+1)}$, es decir, $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 7$ y $x = -1$.



Luego, el conjunto solución es $C.S. = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle -1/3; 7\rangle$.

Para evitar el trabajo de determinar los signos de cada factor (considerando que la expresión $E(x)$ solo tiene un signo en cada uno de los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos), será suficiente tomar un punto en cada intervalo y determinar el signo de $E(x)$ en dicho punto. Este signo será a su vez el signo de $E(x)$ en todo el intervalo.

www.FreeLibros.com

En el ejemplo anterior, la expresión es $E(x) = \dfrac{x+\frac{1}{3}}{(x-7)(x+1)}$ y se tiene el siguiente cuadro:

Intervalo	Signo de $E(x)$	Conjunto solución de $E(x) < 0$
$\langle -\infty; -1\rangle$ $\langle -1; -1/3\rangle$ $\langle -1/3; 7\rangle$ $\langle 7; +\infty\rangle$	para $x = -3$: $-$ para $x = 0$: $+$ para $x = 2$: $-$ para $x = 10$: $+$	$\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{3}; 7\rangle$

OBSERVACIÓN 3.

a) *Si los grados de multiplicidad de todos los puntos críticos son impares, es suficiente determinar el signo de $E(x)$ en un solo intervalo. En los demás intervalos los signos se colocan en forma alternada.*

b) *Si el grado de multiplicidad de algún punto crítico es par, el signo de $E(x)$ se repite en los intervalos adyacentes donde aparece el punto crítico.*

1.3.1 MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

El método de los puntos críticos se utiliza para resolver inecuaciones de la forma: $E(x) > 0$ ó $E(x) < 0$. El procedimiento es el siguiente:

1. Determinar los puntos críticos (los valores de x para los cuales el numerador o el denominador de $E(x)$ se anulan).
2. Hallar en la recta real todos los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos.
3. Determinar el signo de $E(x)$ en cada uno de los intervalos obtenidos (tener en cuenta la observación 3).
4. El conjunto solución de la inecuación es la unión de todos aquellos intervalos que satisfacen la inecuación.

Para las inecuaciones de la forma $E(x) \geq 0$ ó $E(x) \leq 0$, se procede como en el caso anterior, agregando en los intervalos correspondientes todos los valores de x para los cuales $E(x) = 0$.

Ejemplo 7. Resuelva la inecuación $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}{5 - x^2} \geq 0$.

Solución

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}{5 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)}{(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)} \geq 0$$

Puntos críticos: $x = -4$, $x = -\sqrt{5}$, $x = -2$, $x = 1$, $x = \sqrt{5}$ y $x = 3$ (los puntos críticos tienen grado de multiplicidad igual a 1).

El conjunto solución es $C.S. = [-4; -\sqrt{5}) \cup [-2; 1] \cup (\sqrt{5}; 3]$.

1.4 VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** del número real a, denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & si\ a \geq 0 \\ -a, & si\ a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo $|8| = 8$, $|0| = 0$ y $|-5| = -(-5) = 5$

Geométricamente, $|a|$ representa la distancia entre el punto de la recta real a y el origen O (Fig. 1.11).

Así mismo, $|a - b| = |b - a|$ se interpreta como la distancia entre los puntos a y b (Fig. 1.12).

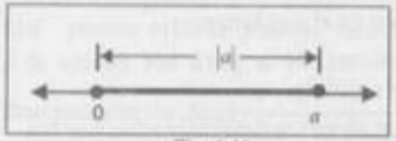


Fig. 1.11

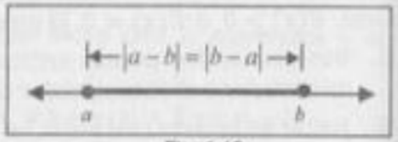


Fig. 1.12

TEOREMA 4. Si a, b son números reales, entonces:

a) $|a| \geq 0,\ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \wedge\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $|ab| = |a||b|$

c) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Demostración

a) Es trivial (de la definición de $|a|$).

b) Si a y b son números reales, entonces existen cuatro posibilidades:

$$a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|$$
$$a \leq 0 \wedge b \leq 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$$
$$a \geq 0 \wedge b \leq 0 \Rightarrow |ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$$
$$a \leq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow |ab| = -ab = (-a)b = |a||b|$$

Por tanto, $|ab| = |a||b|$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

www.FreeLibros.com

c) De la definición de valor absoluto se verifica $a \leq |a|,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$ (I)

Si $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = 0\ \vee\ a + b \neq 0$

Si $a + b = 0 \Rightarrow |a + b| = 0 \leq |a| + |b|$

$$\Leftrightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{(II)}$$

Si $a + b \neq 0$, sea $t = \dfrac{|a + b|}{a + b}$, entonces $|t| = 1$ y

$|a + b| = ta + tb \leq |ta| + |tb|$ (de I)

$$\begin{aligned} |a + b| \leq |ta| + |tb| &= |t||a| + |t||b| \\ &= |t|(|a| + |b|) \\ &= |a| + |b|,\ \text{pues } |t| = 1. \end{aligned}$$

Luego, si $a + b \neq 0$, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$. (III)

Por tanto, de (II) y (III) se tiene $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

El valor absoluto satisface otras propiedades adicionales que se enuncian en el siguiente teorema:

TEOREMA 5.

a) $|a|^2 = a^2$

b) Si $b \geq 0, |a| = b \Leftrightarrow a = b\ \vee\ a = -b$

c) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b\ \vee\ a = -b$

d) $|-a| = |a| = \sqrt{a^2}$

e) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

f) Si $a < x < b \Rightarrow |x| < \text{máx}\{|a|, |b|\}$

g) Si $b > 0, |x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$

h) Si $b \geq 0, |x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$

i) $|x| > b \Leftrightarrow x > b\ \vee\ x < -b$

j) $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b\ \vee\ x \leq -b$

k) $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

Demostración.

a) Es inmediata a partir de la definición.

b) Como $b \geq 0$, $|a| = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$.

e) Si $t = \dfrac{a}{b}$, entonces $tb = a$. Luego,

$$|tb| = |a| \Leftrightarrow |t||b| = |a| \Leftrightarrow |t| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

g) Si $b > 0$, entonces

$$|x| < b \Leftrightarrow x^2 < b^2 \Leftrightarrow -\sqrt{b^2} < x < \sqrt{b^2} \Leftrightarrow -b < x < b.$$

j) Si $b \geq 0$, entonces

$$|x| \geq b \Leftrightarrow x^2 \geq b^2 \Leftrightarrow x \geq b \vee x \leq -b.$$

(Las propiedades i) y j) se verifican para todo $b \in \mathbb{R}$)

k) En primer lugar, se tiene

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

Luego, $|a - b| \leq |a| + |b|$ (I)

Por otro lado,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$
$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$$

Por tanto, $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Leftrightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ (II)

De (I) y (II) se verifica

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Ejemplo 8. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|2x - 4| = 6$ b) $\left|\dfrac{3x + 1}{x - 1}\right| = 4$

c) $\big||5 - 2x| - 4\big| = 8$ d) $2|x - 1| - x^2 + 2x + 7 = 0$

e) $|x - 1| + 4|x - 3| = 2|x + 2|$ f) $|x^2 - 4| = |2x|$

Solución

a) $|2x - 4| = 6 \Leftrightarrow 2x - 4 = 6 \vee 2x - 4 = -6$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1.$

b) $\left|\dfrac{3x + 1}{x - 1}\right| = 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x + 1}{x - 1} = 4 \vee \dfrac{3x + 1}{x - 1} = -4 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = \dfrac{3}{7}.$

www.FreeLibros.com

c) $\big||5 - 2x| - 4\big| = 8 \Leftrightarrow |5 - 2x| - 4 = 8 \vee |5 - 2x| - 4 = -8$

$\Leftrightarrow |5 - 2x| = 12 \vee |5 - 2x| = -4$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 12 \vee 5 - 2x = -12$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2} \vee x = \dfrac{17}{2}.$

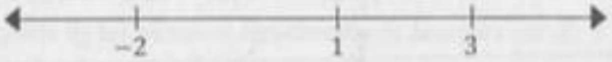
d) $2|x - 1| - x^2 + 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow 2|x - 1| - (x - 1)^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow |x - 1|^2 - 2|x - 1| - 8 = 0 \Leftrightarrow (|x - 1| - 4)(|x - 1| + 2) = 0$

$\Leftrightarrow |x - 1| = 4 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3.$

e) Sea $E(x)$ la ecuación: $|x - 1| + 4|x - 3| = 2|x + 2|$

En este caso tendremos en cuenta la definición de cada valor absoluto. Igualando cada valor absoluto a cero, se obtienen los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = -2$.



1) Para $x \geq 3$, $|x - 3| = x - 3$, $|x + 2| = x + 2$, $|x - 1| = x - 1$

En este intervalo $E(x)$ es equivalente a:

$(x - 1) + 4(x - 3) = 2(x + 2)$

La solución de esta ecuación es $x = \dfrac{17}{3} \in [3; +\infty)$

2) Para $1 \leq x < 3$, $|x - 3| = 3 - x$, $|x + 2| = x + 2$, $|x - 1| = x - 1$

En este intervalo, $E(x)$ es equivalente a:

$(x - 1) + 4(3 - x) = 2(x + 2) \Rightarrow x = \dfrac{7}{5} \in [1; 3\rangle$

3) Para $-2 \leq x < 1$, $|x - 3| = 3 - x$, $|x + 2| = x + 2$, $|x - 1| = 1 - x$

En este intervalo, $E(x)$ es equivalente a :

$(1 - x) + 4(3 - x) = 2(x + 2) \Rightarrow x = \dfrac{9}{7} \notin [-2; 1\rangle$

4) Para $x < -2$, $|x - 3| = 3 - x$, $|x + 2| = -x - 2$, $|x - 1| = 1 - x$

En este intervalo, $E(x)$ es equivalente a:

$(1 - x) + 4(3 - x) = 2(-2 - x) \Rightarrow x = \dfrac{17}{3} \notin \langle -\infty; -2\rangle$

Por lo tanto, las únicas soluciones son $x = \dfrac{17}{3}$ ó $x = \dfrac{7}{5}$.

Ejemplo 9. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |2x - 4| < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |3x - 1| \geq 1\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x^2 - 4| < 2\}$; halle $(A \cup C) \cap B$ y expréselo en forma de intervalos.

Solución

Para determinar A, resolvemos la inecuación $|2x - 4| < 10$

$$|2x - 4| < 10 \Leftrightarrow -10 < 2x - 4 < 10 \Leftrightarrow -3 < x < 7. \text{ Luego, } A = \langle -3; 7 \rangle.$$

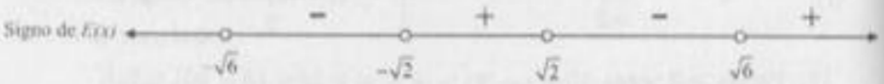
Por otro lado, $|3x - 1| \geq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \geq 1 \vee 3x - 1 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3} \vee x \leq 0$.

Entonces, $B = \langle -\infty; 0] \cup [2/3; +\infty\rangle$.

Para determinar C, transformaremos la inecuación dada en otra equivalente que no contenga valor absoluto, con la finalidad de usar el método de los puntos críticos. En efecto,

$$|x^2 - 4| < 2 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 < 2^2 \Leftrightarrow [(x^2 - 4) - 2][(x^2 - 4) + 2] < 0$$

$$\Leftrightarrow E(x) = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0$$



Por tanto, $C = \langle -\sqrt{6}; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \sqrt{6} \rangle$.

Como $A \cup C = A$, entonces $(A \cup C) \cap B = \langle -3; 0] \cup [2/3; 7\rangle$.

Ejemplo 10. Resuelva $|x + 4| - |5 - 2x| > 4$.

Solución

$$|x + 4| - |5 - 2x| > 4 \Leftrightarrow |x + 4| - 2|x - 5/2| > 4 \quad \dots (*)$$

Procediendo como en el ejemplo 8, tenemos

1) Si $x \geq 5/2$, (*) es equivalente a $(x + 4) - 2(x - 5/2) > 4 \Leftrightarrow x < 5$.
   Considerando la restricción $x \geq 5/2$, una primera solución es $x \in [5/2; 5\rangle$.

2) Si $-4 \leq x < 5/2$, (*) se reduce a $(x + 4) - 2(5/2 - x) > 4 \Leftrightarrow x > 5/3$.
   Considerando la restricción, una segunda solución es $x \in \langle 5/3; 5/2 \rangle$.

3) Si $x < -4$, (*) se transforma en $-(x + 4) - 2(5/2 - x) > 4 \Leftrightarrow x > 13$.
   Considerando la restricción, la tercera solución es $\emptyset$.
   Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $C.S. = \langle 5/3; 5 \rangle$.

www.FreeLibros.com

1.5 AXIOMA DEL SUPREMO

Antes de definir las **cotas** de un conjunto A ($A \subset \mathbb{R}$), veamos algunos conjuntos usuales de $\mathbb{R}$:

1. El **Conjunto de los números naturales**, denotado con ($\mathbb{N}$), es el conjunto
   $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots, n, n + 1, \dots\}$$
   Si $n \in \mathbb{N}$, n es llamado **número natural**.

2. El **Conjunto de los números enteros**, denotado con ($\mathbb{Z}$), es el conjunto
   $$\mathbb{Z} = \{\dots \dots \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
   Si $z \in \mathbb{Z}$, z es llamado **número entero**.

3. El **Conjunto de los números racionales** es denotado por ($\mathbb{Q}$) y
   $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z} \ y \ b \in \mathbb{Z} \ con \ b \neq 0\right\}$$
   Si $q \in \mathbb{Q}$, q es llamado **número racional**.

4. El **Conjunto de los números irracionales** es denotado por ($\mathbb{I}$) y
   $$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \notin \mathbb{Q}\}$$
   Si $x \in \mathbb{I}$, x es llamado **número irracional**.

   Son números irracionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} - \sqrt{7}$. También lo son $\pi = 3{,}14159265 \dots$ y $e = 2{,}718281828459 \dots$

   Una propiedad de los números racionales e irracionales es que entre dos números racionales existen infinitos números irracionales y entre dos números irracionales existen infinitos números racionales ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son **densos** en $\mathbb{R}$).

   También se verifica: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Definición 2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$

a) Se dice que A es **acotado superiormente** si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que
   $$x \leq c \,, \ \forall x \in A.$$
   El número c es llamado **cota superior** de A.

b) Se dice que A es **acotado inferiormente** si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que
   $$d \leq x \,, \ \forall x \in A.$$
   El número d es llamado **cota inferior** de A.

c) Se dice que A es **acotado** si existe $k > 0$ tal que
   $$|x| \leq k \,, \ \forall x \in A.$$
   Un conjunto es acotado si es acotado superiormente e inferiormente.

Son ejemplos de conjuntos acotados inferiormente los conjuntos $\mathbb{N}$, $\left\{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$ y $(0;+\infty)$. Una cota inferior de estos conjuntos es -5.

Por otro lado, los conjuntos $\langle-\infty;3]$, $\{x \in \mathbb{R} \;/\; 5-(x-1)^2 \geq 0\}$ son conjuntos acotados superiormente y una cota superior de ambos conjuntos es 6.

El conjunto $\left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ es acotado, mientras que $\mathbb{N}$ y $\langle-\infty;3]$ no son acotados.

Definición 3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a) $s \in \mathbb{R}$ es llamado **supremo** de A (se denota $s = Sup(A)$) si:

i) s es cota superior de A, es decir, $x \leq s$, $\forall x \in A$.

ii) Si $b \in \mathbb{R}$ y $b < s$, entonces existe $x \in A \;/\; b < x \leq s$.

b) $r \in \mathbb{R}$ es llamado **ínfimo** de A (se denota $r = Inf(A)$) si:

i) r es cota inferior de A, es decir, $r \leq x$, $\forall x \in A$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$ y $r < c$, entonces existe $x \in A \;/\; r \leq x < c$.

El supremo de un conjunto es la menor cota superior y el ínfimo es la mayor cota inferior. Si el supremo o el ínfimo de un conjunto A pertenecen al conjunto, estos son llamados máximo de A (máx(A)) y mínimo de A (mín(A)), respectivamente.

Ejemplo 11. Dados los conjuntos

$$A = \langle 0;9],\quad B = \left\{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\} \;\text{ y }\; C = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; -4 < x < 3\}$$

se verifican:

a) $Inf(A) = 0$, $Sup(A) = 9 = \text{máx}(A)$.

b) $Inf(B) = 0$, $Sup(B) = 1 = \text{máx}(B)$.

c) C es acotado, pues es acotado superior e inferiormente. C no tiene máximo porque si $x \in C$, siempre existirá $y \in C$ tal que $x < y < 3$. En otras palabras, no existe $m \in C$ tal que $x \leq m$, $\forall x \in C$. Análogamente, se demuestra que C no tiene mínimo, pero $Sup(C) = 3$ e $Inf(C) = -4$.

Con el siguiente axioma (del supremo), se completan los axiomas que definen el sistema de los números reales.

Axioma 2. (Axioma del supremo) Todo subconjunto no vacío, acotado superiormente, $B \subset \mathbb{R}$ posee supremo $s = Sup(B) \in \mathbb{R}$.

Teorema 6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Si A es acotado inferiormente, entonces posee ínfimo.

Demostración.

Sea $B = \{-x \;/\; x \in A\} \neq \emptyset$. Si c es cota inferior de A, entonces

$$c \leq x\,,\;\forall x \in A \Leftrightarrow -x \leq -c\,,\;\forall x \in A$$

Luego, $-c$ es cota superior de B . Por el axioma del supremo, B posee supremo, es decir, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = Sup(B)$ y $-s = Inf(A)$.

Una propiedad importante del conjunto de los números enteros es la que se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 7. (Principio del buen orden). Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$, acotado inferiormente, posee mínimo.

Demostración.

Sea $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$ y A acotado inferiormente, entonces por el teorema anterior, A posee ínfimo. Sea $s = Inf(A)$, bastará probar que $s \in A$.

Por ser $s = Inf(A)$ y por ser $s < s+1$, existe $n_0 \in A$ tal que

$$s \leq n_0 < s+1 \Rightarrow n_0 - 1 < s \Rightarrow (n_0 - 1) \notin A \text{ (pues } s = Inf(A))$$

Por tanto, $s = n_0 \in A$.

1.6 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En matemática, muchas definiciones y proposiciones se realizan usando el principio de inducción matemática que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 8. (Primer principio de Inducción Matemática)

Sea $P(n)$ una proposición enunciada en términos de n, $n \in \mathbb{N}$, tal que

1°.- $P(1)$ es verdadero.

2°.- Si $P(h)$ es verdadero, $h > 1$, implica $P(h+1)$ es verdadero (Hipótesis inductiva).

Entonces, $P(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \;/\; P(n) \text{ es falso}\} \subset \mathbb{N}$. Probaremos que $A = \emptyset$.

Supongamos que $A \neq \emptyset$, entonces por el principio del buen orden, A posee mínimo a_0, es decir, $P(a_0)$ es falso.

Como $P(1)$ es verdadero $\Rightarrow a_0 > 1 \Rightarrow (a_0 - 1) \in \mathbb{N} \wedge a_0 - 1 \notin A$, pues a_0 es mínimo. Como $(a_0 - 1) \notin A \Rightarrow P(a_0 - 1)$ es verdadero. Luego, por la hipótesis inductiva $P((a_0 - 1) + 1)$ es verdadero, es decir, $P(a_0)$ es verdadero. Lo que contradice al hecho de que a_0 es mínimo de A ($P(a_0)$ es falso).

Por tanto, $A = \emptyset$, es decir, $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 12. Demuestre que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución

En este caso $P(n): 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Para $n=1$, $P(1)$: $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ es verdadero

Supongamos que $P(h)$ es verdadero (hipótesis inductiva), es decir,

$$1+2+\ldots+h=\frac{h(h+1)}{2}$$

Probaremos que $P(h+1)$ es verdadero, esto es,

$$1+2+\ldots+h+(h+1)=\frac{(h+1)[(h+1)+1]}{2}$$

En efecto,

$$1+2+3+\ldots+h+(h+1)=\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{(h+1)((h+2)}{2}$$

Entonces, por el primer principio de inducción matemática se cumple que

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejemplo 13. Pruebe que n^3-n es divisible por 6, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Solución

$P(n)$: n^3-n es divisible por 6, $\forall n\in\mathbb{N}$

Recordemos que a es divisible por b si $a=bc,\ c\in\mathbb{Z}$.

1) Para $n=1$, $P(1)$ es verdadero, pues $0-0=6(0)$

2) Sea $h\geq 1$ y supongamos que $P(h)$ es verdadero (hipótesis inductiva), es decir, $h^3-h=6k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Probaremos que $P(h+1)$ es verdadero. En efecto,

$$(h+1)^3-(h+1)=h^3+3h^2+2h$$
$$(h^3-h)+3h^2+3h=6k+3h(h+1)$$

Como h y $h+1$ son naturales consecutivos, uno de ellos es par y el producto $h(h+1)$ es divisible por 2, entonces $h(h+1)=2r,\ r\in\mathbb{Z}$.

Luego, $(h+1)^3-(h+1)=6k+3(2r)=6(k+r)=6m$, donde $m=(k+r)\in\mathbb{Z}$.

Entonces, por el primer principio de inducción matemática

$$n^3-n \text{ es divisible por } 6,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Puesto que algunas propiedades son válidas a partir de un cierto n_0, es necesario reformular el teorema 8.

www.FreeLibros.com

Teorema 9. Sea $P(n)$ una proposición enunciada en términos de $n\in\mathbb{Z}$, tal que:

1°: $P(n_0)$ es verdadero, donde $n_0\in\mathbb{Z}$.

2°: Si $P(h)$ es verdadero, $h\geq n_0$, implica que $P(h+1)$ es verdadero. Entonces, $P(n)$ es verdadero, $\forall n\in\mathbb{Z}, n\geq n_0$.

1.7 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Si $a>0$ y $b>0$, demuestre que $2\sqrt{ab}\leq a+b$.

Solución

Como $a>0$ y $b>0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0\Rightarrow a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b>0$.

Por tanto, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

PROBLEMA 2. Sean $A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^4-3x^3-9x^2+12x+20=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^4-x^2+20=0\}$ y $C=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^3+2x^2-5x-6=0\}$.

Halle $(A\cup B)-C$.

Solución

a) Aplicando el método de Ruffini, tenemos

$x^4-3x^3-9x^2+12x+20=(x+2)((x-2)(x^2-3x-5)=0$,

de donde $x+2=0\vee x-2=0\vee x^2-3x-5=0$.

Entonces, $x=-2\ \vee\ x=2\ \vee\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(1)(-5)}}{2}$.

Por tanto, $A=\left\{-2,2,\ \dfrac{3-\sqrt{29}}{2},\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

b) Como $x^4-x^2+20=(x^2-5)(x^2+4)=0$, entonces $B=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

c) Finalmente, $x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)=0$

Luego, $C=\{-3;\ 2;\ -1\}$

Por tanto, $(A\cup B)-C=\left\{-2,\dfrac{3-\sqrt{29}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{29}}{2},-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$.

PROBLEMA 3. Halle el conjunto solución de $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{x^2+26x-40-2x^3} \le 0$.

Solución

En primer lugar, ordenaremos los términos de la inecuación de modo que el coeficiente de la mayor potencia de x (tanto del numerador como del denominador) sea positivo. Recuérdese que cada cambio de signo invierte la desigualdad.

$$\frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{x^2+26x-40-2x^3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{2x^3-x^2-26x+40} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-2)(x+2)}{(x+4)(x-2)(2x-5)} \ge 0 \Leftrightarrow E(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+4)(2x-5)} \ge 0,\ \forall x \ne 2$$

Puntos críticos: $x=-1,\ x=-2,\ x=-4\ \text{y}\ x=5/2$.

Por tanto, el conjunto solución es

$C.S. = \langle -4;-2\rangle \cup \langle \frac{5}{2};+\infty\rangle \cup \{1;-2\} = \langle -4;-2] \cup \langle \frac{5}{2};+\infty\rangle \cup \{1\}$.

PROBLEMA 4. Si

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ (x+1)^4 \le (x+1)^2\}\ \text{y}\ B = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{x^2+4x+10}{x^2-x-12} > 0\right\}$$

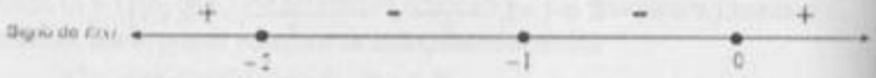
Halle $A' - B$. (A' es el complemento de A).

Solución

a) $(x+1)^4 \le (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^4 - (x+1)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2[(x+1)^2-1] \le 0 \Leftrightarrow E(x) = (x+1)^2x(x+2) \le 0$

Puntos críticos: $x=-2,\ x=-1\ \text{y}\ x=0$.



Luego, $A = \langle -2;-1\rangle \cup \langle -1;\ 0\rangle \cup \{-2,-1,0\} = [-2;\ 0]$.

www.FreeLibros.com

b) $\dfrac{x^2+4x+10}{x^2-x-12} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2+6}{(x-4)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow E(x) = (x-4)(x+3) > 0$

$(x^2+4x+10 = (x+2)^2+6 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

Puntos críticos: $x=-3\ \text{y}\ x=4$.

Luego, $B = \langle -\infty;\ -3\rangle \cup \langle 4;\ +\infty\rangle$.

Por tanto, $A' - B = (\langle -\infty;\ -2\rangle \cup \langle 0;\ +\infty\rangle) - (\langle -\infty;\ -3\rangle \cup \langle 4;\ +\infty\rangle)$

$= [-3;\ -2\rangle \cup \langle 0;4]$.

PROBLEMA 5. Sean

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \sqrt{x^2+x-2} < 4\right\}\ \text{y}\ B = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2+3x+8 \le \frac{2x-74}{x-7}\right\}.$$

Halle $A \cap B$.

Solución

a) $\sqrt{x^2+x-2} < 4 \Leftrightarrow x^2+x-2 \ge 0 \wedge x^2+x-2 < 16$

Si C_1 y C_2 son, respectivamente, los conjuntos solución de

$x^2+x-2 \ge 0$ y $x^2+x-2 < 16$

entonces $A = C_1 \cap C_2$

i) $x^2+x-2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty;\ -2] \cup [1;\ +\infty\rangle = C_1$

ii) $x^2+x-2 < 16 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{73}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{73}}{2} < x+\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{73}}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\frac{1+\sqrt{73}}{2};\ \frac{\sqrt{73}-1}{2}\rangle = C_2$

Finalmente, $A = C_1 \cap C_2 = \langle -\frac{1+\sqrt{73}}{2};\ -2] \cup [1; \frac{1+\sqrt{73}}{2}\rangle$.

b) $x^2+3x+8 \le \dfrac{2x-74}{x-7} \Leftrightarrow \dfrac{x^3-4x^2-15x+18}{x-7} \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)(x-6)}{x-7} \le 0$$

Puntos críticos: $x = -3,\ x = 1,\ x = 6$ y $x = 7$.

Luego, $B = [-3;\ 1] \cup [6;\ 7\rangle$.

Por tanto, $A \cap B = [-3;\ -2] \cup \{1\}$.

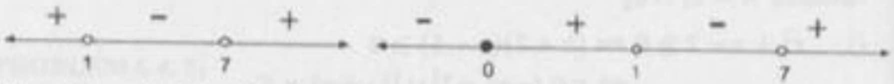
PROBLEMA 6. Si $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / -1 \le \dfrac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} \le 1\right\}$, halle $Sup(A)$.

Solución

$$-1 \le \frac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} \le 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} \ge -1 \ \wedge\ \frac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} + 1 \ge 0 \ \wedge\ \frac{x^2+8x+7}{x^2-8x+7} - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+14}{(x-1)(x-7)} \ge 0 \ \wedge\ \frac{16x}{(x-1)(x-7)} \le 0$$



El conjunto solución de la inecuación dada es

$$C.S. = (\langle -\infty;\ 1\rangle \cup \langle 7;\ +\infty\rangle) \cap (\langle -\infty;\ 0] \cup \langle 1;\ 7\rangle) = \langle -\infty;\ 0]$$

Luego, $A = \langle -\infty;\ 0]$ y $Sup(A) = 0$.

PROBLEMA 7. Si $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < \dfrac{x^2-4}{x^2+4} \le 1\right\}$, halle $\min(A')$ y $\max(A')$.

Solución

$$0 < \frac{x^2-4}{x^2+4} \le 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4 \le x^2 + 4 \Leftrightarrow 4 < x^2 \ \wedge\ x^2 - 4 \le x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x < -2 \ \vee\ x > 2) \wedge (x \in \mathbb{R})$$

De donde, $A = \langle -\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$ y $A' = [-2;\ 2]$

Por tanto, $\min(A') = -2$ y $\max(A') = 2$.

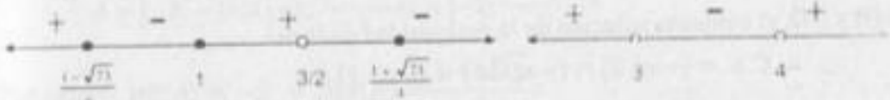
PROBLEMA 8. Resuelva la inecuación $\dfrac{3}{2x-3} \ge x^2 - 4 > 7x - 16$

Solución

$$\frac{3}{2x-3} \ge x^2 - 4 > 7x - 16 \Leftrightarrow \frac{3}{2x-3} \ge x^2 - 4 \ \wedge\ x^2 - 4 > 7x - 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 - \frac{3}{2x-3} \le 0 \ \wedge\ x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2-x-9)}{2x-3} \le 0 \ \wedge\ (x-3)(x-4) > 0$$



Por tanto, el conjunto solución es

$$C.S. = \left(\left[\frac{1-\sqrt{73}}{4};\ 1\right] \cup \left\langle\frac{3}{2};\ \frac{1+\sqrt{73}}{4}\right]\right) \cap (\langle -\infty; 3\rangle \cup \langle 4;\ +\infty\rangle)$$

$$= \left[\frac{1-\sqrt{73}}{4};\ 1\right] \cup \left\langle\frac{3}{2};\ \frac{1+\sqrt{73}}{4}\right].$$

PROBLEMA 9. Halle el conjunto solución de $0 \le \dfrac{x^4-5x^2-4x}{x^2+4x+3} \le 1$

Solución

$$0 \le \frac{x^4-5x^2-4x}{x^2+4x+3} \le 1 \Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-4x}{x^2+4x+3} \ge 0 \ \wedge\ \frac{x^4-6x^2-8x-3}{x^2+4x+3} \le 0$$

Factorizando por el método de Ruffini, tenemos

$$\frac{x(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)}{(x+1)(x+3)} \ge 0 \ \wedge\ \frac{(x+1)^3(x-3)}{(x+1)(x+3)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\langle -\infty; -3\rangle \cup \left[\frac{1-\sqrt{17}}{2};\ -1\right\rangle \cup \langle -1;\ 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right\rangle\right)$$

$$\wedge\ x \in (\langle -3;\ -1\rangle \cup \langle -1;\ 3])$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación dada es

$$C.S. = \left[\frac{1-\sqrt{17}}{2};\ -1\right\rangle \cup \langle -1;\ 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2};\ 3\right].$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 10. Resuelva la inecuación $\sqrt{2-x}-\sqrt{10-x}<2$

Solución

a) La inecuación dada es una desigualdad de números reales si y solo si

$$2-x\geq 0 \;\wedge\; 10-x\geq 0 \Leftrightarrow x\in\langle-\infty;\,2] \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

b) Para $x\in\langle-\infty;\,2]$, cada miembro de la desigualdad son números reales. Luego,

$$\sqrt{2-x}-\sqrt{10-x}<2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}<2+\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow 2-x<4+4\sqrt{10-x}+10-x \Leftrightarrow \sqrt{10-x}>-3$$

Esta última desigualdad se verifica para cualquier $x\in\langle-\infty;\,10]$ ... (II)

De (I) y (II), el conjunto solución de la desigualdad dada es

$$C.S.=\langle-\infty;\,2]\cap\langle-\infty;\,10]=\langle-\infty;\,2].$$

PROBLEMA 11. Halle el conjunto solución de $\dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{81-x^2}\,\sqrt[3]{x-4}}>0$.

Solución

La raíz cuadrada del denominador está definida si y solo si

$$81-x^2>0 \Leftrightarrow x\in\langle-9;\,9\rangle \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

Por otro lado, como $\sqrt{81-x^2}>0$ se tiene

$$\frac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{81-x^2}\,\sqrt[3]{x-4}}>0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt[3]{x-4}}>0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-4}>0$$

$$\Leftrightarrow x\in\langle-\infty;\,-5\rangle\cup\langle 4;\,+\infty\rangle \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

De (I) y (II), el conjunto solución de la desigualdad dada es

$$C.S.=\langle-9;\,9\rangle\cap(\langle-\infty;\,-5\rangle\cup\langle 4;\,+\infty\rangle)=\langle-9;\,-5\rangle\cup\langle 4;\,9\rangle.$$

PROBLEMA 12. Si $A=\{x\in\mathbb{R}\;/\;\sqrt{3x+6}>x+1\}$, halle $\mathrm{Sup}(A)$ e $\mathrm{Inf}(A)$.

Solución

La desigualdad tiene sentido en $\mathbb{R}$ si y solo si $3x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$.

Para resolver la desigualdad dada, consideremos los casos:

$$x+1<0 \;\vee\; x+1\geq 0$$

a) Si $x+1<0$, la desigualdad se cumple para todo $x\geq -2$, porque la raíz cuadrada es siempre mayor o igual que cero. Por tanto, la desigualdad es válida si

$$x+1<0 \wedge x\geq -2 \Leftrightarrow x\in[-2;\,-1\rangle \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

www.FreeLibros.com

b) Si $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ y

$$\sqrt{3x+6}>x+1 \Leftrightarrow 3x+6>(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2-x-5<0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\langle\frac{1-\sqrt{21}}{2};\,\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle$$

Luego, considerando las restricciones $x\geq -2$ y $x\geq -1$, se cumple

$$x\in\left[-1;\,\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

Finalmente, de (I) y (II) se tiene

$$A=[-2;\,-1\rangle\cup\left[-1;\,\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle=\left[-2;\,\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle$$

Por tanto, $\mathrm{Inf}(A)=-2$ y $\mathrm{Sup}(A)=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

PROBLEMA 13. Halle el conjunto solución de:

$$|3x-2|\leq|4x-4|+|7x-6|$$

Solución

$$|3x-2|=|(3x-7x+4)+(7x-4-2)|$$

$$=|(4-4x)+(7x-6)|\leq|4-4x|+|7x-6|$$

Por tanto, $|3x-2|\leq|4x-4|+|7x-6|,\ \forall x\in\mathbb{R}$

El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 14. Resolver $|x^2-4|+|2x-5|<6$ ....(α)

Solución

$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & \text{si } x^2-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \;\vee\; x\leq -2\\ 4-x^2, & \text{si } x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2\end{cases}$$

$$|2x-5|=\begin{cases}2x-5, & \text{si } 2x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5/2\\ 5-2x, & \text{si } 2x-5<0 \Leftrightarrow x<5/2\end{cases}$$

i) Si $x\geq 5/2$, $(\alpha)\Leftrightarrow (x^2-4)+(2x-5)<6$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2<16 \Leftrightarrow -5<x<3$$

Por tanto, $x\in[5/2\,;\,3\rangle$.................. (I)

ii) Si $x \in [2;5/2)$, $(\alpha) \Leftrightarrow (x^2-4)+(5-2x)<6$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<6 \Leftrightarrow 1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}$$

Luego, $x \in [2;\ 5/2)$ ....(II)

iii) Si $x \in (-2;\ 2)$, $(\alpha) \Leftrightarrow (4-x^2)+(5-2x)<6$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2>2 \Leftrightarrow x>\sqrt{2}-1 \vee x<-1-\sqrt{2}$$

De donde, $x \in (\sqrt{2}-1;\ 2)$ ....(III)

iv) Si $x \in (-\infty;\ -2]$, $(\alpha) \Leftrightarrow (x^2-4)+(5-2x)<6$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<6 \Leftrightarrow 1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}$$

En este caso el conjunto solución es ϕ...........(IV)

De (I), (II), (III) y (IV) se concluye que el conjunto solución de (α) es

$$(\sqrt{2}-1;\ 2) \cup [2;\ 5/2) \cup [5/2;3) = (\sqrt{2}-1;\ 3).$$

PROBLEMA 15. Sean $A=\{x \in \mathbb{R}\ /\ |x^2-2x-3|<3x-3\}$

$B=\{x \in \mathbb{R}\ /\ |x-2| \geq 2x-3\}$

$C=\left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \left|\frac{x-1}{x+4}\right|<2\right\}$

$D=\{x \in \mathbb{R}\ /\ |2x-3|<|4-3x|\}$

Halle $(A \cup C)-(B \cup D)$.

Solución

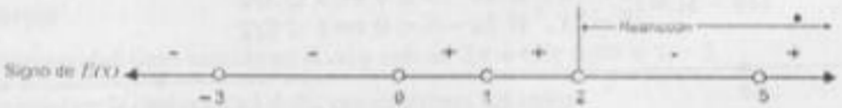
a) $|x^2-2x-3|<3x-3$ sólo tiene sentido si $3x-3>0 \Leftrightarrow x>1$.

Para $x>1$ se tiene:

$|x^2-2x-3|<3x-3 \Leftrightarrow (x^2-2x-3)^2-(3x-3)^2<0$

$\Leftrightarrow [(x^2-2x-3)-(3x-3)][(x^2-2x-3)+(3x-3)]<0$

$\Leftrightarrow x(x-5)(x+3)(x-2)<0$



Por tanto, $A=(2;5)$ (considerando la restricción $x>1$).

b) $|x-2| \geq 2x-3 \Leftrightarrow x-2 \geq 2x-3 \vee x-2 \leq 3-2x$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \leq 5/3 \Leftrightarrow x \leq 5/3$$

Luego, $B=(-\infty;\ 5/3]$.

c) $\left|\frac{x-1}{x+4}\right|<2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^2-2^2<0 \Leftrightarrow \left[\frac{x-1}{x+4}-2\right]\left[\frac{x-1}{x+4}+2\right]<0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x-9)(3x+7)}{(x+4)^2}<0$$

El conjunto solución de esta desigualdad es $C=(-\infty;\ -9) \cup (-\frac{7}{3};+\infty)$.

d) $|2x-3|<|4-3x| \Leftrightarrow |2x-3|^2<|4-3x|^2$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^2-(4-3x)^2<0 \Leftrightarrow (5x-7)(1-x)<0$$

Así, $D=(-\infty;\ 1) \cup (\frac{7}{5};+\infty)$

Finalmente, $(A \cup C)-(B \cup D)=\left((-\infty;-9) \cup (-\frac{7}{3};+\infty)\right)-\mathbb{R}=\emptyset$.

PROBLEMA 16. Resuelva la inecuación $0<\left|\frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6}\right| \leq 1$.

Solución

$$0<\left|\frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6} \leq 1 \wedge \frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6} \geq -1 \wedge \frac{x^2+7x+6}{x^2-7x+6} \leq 1\right) \wedge \frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x-1)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x^2+12}{(x-1)(x-6)} \geq 0 \wedge \frac{14x}{(x-1)(x-6)} \leq 0\right) \wedge x \in \mathbb{R}-\{\pm 1;\ \pm 6\}$$

Resolviendo las tres inecuaciones e intersecando las soluciones parciales, se tiene

$C.S.=(-\infty;\ 0]-\{-1;\ -6\}$.

PROBLEMA 17. Halle el conjunto solución de $\left|\frac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9}\right| \geq 1$.

Solución

$$\left|\frac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9} \geq 1 \vee \frac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{20x}{(x-1)(x-9)} \geq 0 \vee \frac{2x^2+18}{(x-1)(x-9)} \leq 0$$

Resolviendo las dos desigualdades y uniendo las soluciones parciales, se obtiene

$C.S.=[0;+\infty)-\{1,9\}$.

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 18. Resuelva la inecuación $(x-1)^2 - 6|x-1| + 8 > 0$.

Solución

Como $(x-1)^2 = |x-1|^2$ y haciendo $z = |x-1|$, se tiene

$(x-1)^2 - 6|x-1| + 8 > 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 8 > 0 \Leftrightarrow (z-2)(z-4) > 0$

$\Leftrightarrow z < 2 \lor z > 4 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \lor |x-1| > 4$

$\Leftrightarrow (-2 < x - 1 < 2) \lor (x - 1 < -4 \lor x - 1 > 4)$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle -1; 3\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$

PROBLEMA 19. Si $x \in \langle -2; 0\rangle$, halle $M > 0$ tal que $\left|\dfrac{x^2-8}{x-3}\right| < M$.

Solución

En primer lugar, $\left|\dfrac{x^2-8}{x-3}\right| = |x^2-8| \cdot \dfrac{1}{|x-3|}$

Si $x \in \langle -2;\ 0\rangle \Leftrightarrow -2 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 4 \Leftrightarrow -8 < x^2 - 8 < -4$.

Entonces, $|x^2 - 8| < 8$ (I)

Por otro lado, $x \in \langle -2;\ 0\rangle \Leftrightarrow -2 < x < 0 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < -3$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x-3} < -\dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-3|} < \dfrac{1}{3}$ (II)

De (I) y (II) obtenemos: $\left|\dfrac{x^2-8}{x-3}\right| = |x^2-8| \cdot \dfrac{1}{|x-3|} < 8\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$

Finalmente, $M = 8/3$.

PROBLEMA 20. Halle el supremo y el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{3 + \left|\frac{x-2}{x+4}\right| \ /\ x \in \langle -2;\ 4]\right\}.$$

Solución

En primer lugar, se observa que: $\dfrac{x-2}{x+4} = 1 - \dfrac{6}{x+4}$

Por otro lado, $x \in \langle -2;\ 4] \Leftrightarrow -2 < x \le 4 \Leftrightarrow 2 < x + 4 \le 8$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{x+4} \ge \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow -3 < -\dfrac{6}{x+4} \le -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow -2 < 1 - \dfrac{6}{x+4} \le 1 - \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -2 < \dfrac{x-2}{x+4} \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 \le \left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| < 2 \Leftrightarrow 3 \le 3 + \left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| < 5$

Luego, $A = [3;\ 5\rangle$ y, por tanto, $\text{Inf}(A) = 3$ y $\text{Sup}(A) = 5$.

EJERCICIOS

En los ejercicios 1-10, demuestre las propiedades que se indican.

1. Si $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \le a + b \le \sqrt{2}$
2. Si $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow ac + bd \le 1$
3. $ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le a + b$
5. Si a, b y c son positivos $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$
6. $|xy - ab| \le |x||y - b| + |b||x - a|$
7. Si $a < x < b \Rightarrow |x| < \text{máx}\{|a|, |b|\}$
8. $|a + b - c| \le |a| + |b| + |c|$
9. $|a - b| \le |a - c| + |c - b|,\ \forall c \in \mathbb{R}$
10. Si a y b son diferentes de cero $\Rightarrow \dfrac{|a|}{b^2} + \dfrac{|b|}{a^2} \ge \dfrac{1}{|a|} + \dfrac{1}{|b|}$

En los ejercicios 11-13, halle un número M tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple:

11. $2x - x^2 \le M$ R. $M = 1$
12. $-(x^2 + 4x + 13) \le M$ R. $M = -9$
13. $2 - x^{1/3} - x^{2/3} \le M$ R. $M = 9/4$

En los ejercicios 14-18, halle un número M tal que:

14. Si $x \in \langle 0; 4\rangle$, $\left|\dfrac{x+6}{2x+1} - 3\right| < M$ R. $M = 17$
15. Si $|x - 2| < \dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{x-2}{x^2+4x-5}\right| < M$
16. Si $x \in \langle 2; 5\rangle$, $\left|\dfrac{2x+7}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right| < M$ R. $M = 15/4$
17. Si $x \in \langle 3; 7\rangle$, $\left|\dfrac{3x+4}{x-1} - 2\right| < M$
18. Si $|x + 1| < 1$, $\left|\dfrac{x^2-5x}{x^2+x+10}\right| < M$ R. $M = 7/4$

www.FreeLibros.com

En los ejercicios 19-30, halle las raíces reales de las ecuaciones que se dan.

19. $12x - 4 = 3x + 9$

20. $5x^2 - x - 4 = 0$

21. $2x^2 - 11x - 4 = 0$

22. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$

23 $x^3 - 13x^2 + 44x - 32 = 0$

24. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

25. $x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x + 12 = 0$

26. $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = 0$

27. $3|x + 1| - 5|2x - 1| = |3x + 4|$

28. $|x^2 - 4x| = 3x + 4$

29. $|4 - 8x| = \big|x - |2x + 1|\big|$

30. $|2x - 1| = x - 1$

R. **20.** $\{1; -4/5\}$ **22.** $\{0; 1; 2\}$ **24.** $\{\pm 2\}$ **26.** $\{\pm 1; -2\}$

28. $\left\{\frac{7 \pm \sqrt{65}}{2}\right\}$ **30.** $\emptyset$

En los ejercicios 31-82, halle el conjunto solución de las inecuaciones que se dan.

31. $3x - 8 < 5x - 2$

32. $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

33. $(x + 5)(x + 6) - 6 \geq 6$

34. $1 - 2x - 3x^2 \geq 0$

35. $3x^2 - 5x - 2 > 0$

36. $x^3 + 4x^2 + x < 6$

37. $(x^2 + x - 6)(4x - 4 - x^2) \leq 0$

38. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 < 0$

39. $\frac{2x + 6}{5 - x} \leq 3$

40. $\frac{1 - 3x}{1 + x} > 2$

41. $x - 1 < \frac{3x + 1}{x + 2}$

42. $\frac{x - 2}{x + 4} \leq \frac{x + 5}{x + 3}$

43. $\frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 - 4x - 5} \leq 0$

44. $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -2$

45. $\frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 - x - 2)} < 0$

46. $\frac{x - 2}{x - 4} > \frac{x + 2}{x}$

47. $\frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 3} > 0$

48. $\frac{2}{3x - 2} < \frac{3}{x + 2}$

49. $\frac{2 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1} \geq 0$

50. $\frac{32}{x^2 - 4} \geq \frac{x}{x - 2} - \frac{4}{x + 2}$

51. $\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^2 + 5x - 14} \leq 0$

52. $\frac{x^2 + 8x - 12 - x^3}{7x - x^2 - 6} \geq 0$

53. $\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}} < 1$

54. $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 14x - 15} > x - 3$

www.FreeLibros.com

55. $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$

56. $x - \sqrt{165 - 4x - x^2} < 15$

57. $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{2 - x} > 0$

58. $\sqrt{x + 11} + \sqrt{x - 1} \geq \sqrt{2x + 26}$

59. $\sqrt{2 + \sqrt{x - 8}} < \sqrt{16 - x}$

60. $\sqrt{x^2 - 11x + 30} \geq 6 - x$

61. $\sqrt{\frac{46 - 2x}{x - 5}} > \sqrt{x - 7}$

62. $\sqrt{\frac{x^2 + 3x - 4}{4 - \sqrt{x^2 + 6x}}} > x - 2$

63. $|2x - 5| < 3$

64. $|x^2 - 4| > 5$

65. $|3x - 4| \leq x + 4$

66. $|5x + 1| \geq 2x - 8$

67. $x \leq |4x - 7| < x + 5$

68. $|x - 7| - |x - 5| \leq |x - 4|$

69. $|2x|^2 - x - 3 > 0$

70. $\big|3 - |2x + 3|\big| < 2$

71. $|3x^2 - 5x - 2| \leq |3x^2 + 4x + 1|$

72. $|3x - 1| + |x + 4| \geq |4x + 3|$

73. $x^2 - 3x + 1 < |x + 3|$

74. $|x^2 + 2x - 3| \leq 2 - 2x$

75. $|2x - 5| > |x| + |2x - 2| - 3$

76. $|x^2 - 9| - 4|x - 1| < 3 - x^2$

77. $\frac{\big||x - 1| + 2\big| - |x - 1|^2}{x^2 + 1} \geq 0$

78. $\left|\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}\right| < 1$

79. $\frac{\left|\frac{x + 1}{x}\right| - |x - 1|}{-2x - 1 - x^2} < 0$

80. $\frac{x^{2/5} - 2x^{1/5} + 8}{|x| + 2 - x^2} \geq 0$

81. $\left|\frac{x + 1}{1 - |x + 1|}\right| > \frac{1}{x + 1}$

82. $3\left(|x + 1| - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 1 - 2\big||x + 1| - 1/6\big|$

R. 31. $\langle 5; +\infty\rangle$ 32. $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$ 33. $\langle -\infty; -9] \cup [-2; +\infty\rangle$

34. $[-1; 1/3]$ 35. $\langle -\infty; -1/3\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$ 36. $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle -2; 1\rangle$

37. $\langle -\infty; -3] \cup [2; +\infty\rangle$ 38. $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$ 39. $\left[\frac{9}{5}; 5\right\rangle$

43. $\langle -1; 5\rangle$ 44. $\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ 45. $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

46. $\langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$ 47. $\langle -\infty; -2/3\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; +\infty\right\rangle$

48. $\langle -2; 2/3\rangle \cup \left\langle \frac{10}{7}; +\infty\right\rangle$ 49. $[-1; 2] - \{1\}$ 50. $[-4; -2\rangle \cup \langle 2; 6]$

51. $\langle -\infty; -7\rangle \cup [-3; 2\rangle$ 52. $[-3; 1\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle \cup \{2\}$ 53. $[3; 2 + \sqrt{6}\rangle$

54. $\langle -\infty; 4/3\rangle \cup [3; +\infty\rangle$ 55. $\langle -\infty; -3]$ 56. $[-15; 11]$ 57. $\left\langle \frac{5}{3}; 2\right]$

58. $[5; +\infty\rangle$ 59. $[8; 12\rangle$ 60. $[6; +\infty\rangle$ 61. $\langle 7; 11\rangle$

62. $\langle -8; 6] \cup [1,; 2\rangle$ 63. $\langle 1; 4\rangle$ 64. $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

68. $\langle -\infty; 2] \cup [16/3; +\infty\rangle$ 69. $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 3/2; +\infty\rangle$

70. $\langle -4; -2\rangle \cup \langle -1; 1\rangle$ 71. $[1/2; +\infty\rangle \cup \{-1/3\}$ 72. $\mathbb{R}$

73. $\langle 2-\sqrt{6}; 2+\sqrt{6}\rangle$ 74. $[-5; -1]$ 75. $\langle -6; 2\rangle$

77. $\langle -2-\sqrt{6}; -2+\sqrt{6}\rangle \cup \{0\}$

78. $\langle -\infty; -\frac{3+\sqrt{33}}{4}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{33}-3}{4}\rangle$ 80. $[-2; 2]$

81. $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle \frac{\sqrt{5}-3}{2}; +\infty\rangle - \{-2; 0\}$ 82. $\langle -\infty; 3/2] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

En los ejercicios 83-100, determine el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de cada conjunto, si existen.

83. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \le 9\}$ R. $Sup = máx = 3,\ Inf = min = -3$

84. $B = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1}{1-x} \le 1 + 2x\right\}$

85. $C = \{x \in \mathbb{R} \ / 21 + 4x - x^2 > 0\}$ R. $Sup = 7,\ Inf = -3$

86. $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |4 - x| > x\}$

87. $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x||x+1| \le 2\}$ R. $Sup = 1,\ Inf = -2$

88. $F = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x^2 + 2x - 4| \le 7\}$

89. $G = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x^2 - 5x + 12| > 8\}$ R. $\nexists\, Sup,\ \nexists\, Inf$

90. $H = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-1| + |x+2| \le 4\}$

91. $I = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |6 + x - x^2| \le 6\}$ R. $Sup = 4,\ Inf = -3$

92. $J = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x+6| + |3-x| = 9\}$

93. $K = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |9 - x^2| + |3x - 2| < |x + 50|\}$

94. $L = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |5x - 10| + 4|x^2 - 1| - 20x + 5 > 0\}$

95. $M = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ |5x - 10| + 4|x^2 - 4| - 3x^2 < 0\}$

96. $N = \{x \in I \ / \ |x - 8| - |4x^2 - 1| < 0\}$

97. $O = \{x \in \mathbb{N} \ / \ |x^2 - x + 1| < |3x^2 + 5|\}$

98. $P = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ |x^2 - 4| < 16\}$

99. $Q = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x^2 - 9| - 3|x - 4| < 1\}$

100. $R = \left\{x \in \mathbb{N} \ / \ \left|\frac{x+1}{x}\right| < 10\right\}$

En los ejercicios 101-122, demostrar cada uno de los enunciados usando el Principio de Inducción Matemática.

101. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n \in \mathbb{N}$

102. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \forall n \in \mathbb{N}$

103. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

104. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$

105. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

106. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2),\ \forall n \in \mathbb{N}$

107. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

108. $n^2 + n$ es divisible por 2, $\forall n \in \mathbb{N}$

109. $n^3 + 2n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

110. $n^4 + 2n^3 + n^2$ es divisible por 4, $\forall n \in \mathbb{N}$

111. $n^3 + 5^n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

112. $10^n - 1$ es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

113. $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

114. $8^n - 5^n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

115. $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

116. Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $0 < x < y$, entonces $x^n < y^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

117. $2^n > n^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 4$

118. $4^n > n^4;\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 5$

119. $3^n \ge 1 + 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

www.FreeLibros.com

120. $n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

121. $a^n - 1 > n(a-1)$, $\forall a > 1$

122. $(1+x)^n \geq 1 + nx$, si $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Si $n \in [\mathbb{N} \cup \{0\}]$, el factorial de n ($n!$) se define inductivamente por

$0! = 1$ y $1! = 1$

Si $h \geq 1$, supongamos definido $h!$, entonces $(h+1)! = h!\,(h+1)$.

Con esta definición, si $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Pruebe:

123. $2^{n-1} \leq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$

124. $n! > 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$

125. Se define el coeficiente binomial

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ ,\ 0 \leq r \leq n$$

i) Pruebe que $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$, $1 \leq r \leq n$

ii) Si $x, y \in \mathbb{R}$, demuestre:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \quad \text{(Fórmula del binomio)}$$

126. $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$

127. Si a, b y n son enteros positivos, pruebe:

i) $\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \dots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$

ii) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

2 RELACIONES Y FUNCIONES

Uno de los conceptos más importantes en toda la matemática es el de función. Generalmente en casi todas las ramas de esta ciencia, las funciones cumplen un rol fundamental.

Iniciaremos este capítulo dando las definiciones generales de relaciones y funciones. Enseguida, definiremos las funciones reales de variable real, pues estas funciones son el objetivo principal de este capítulo y de los siguientes.

2.1 RELACIONES

En matemática, como en otras ciencias, muchas veces se desea establecer una relación o correspondencia entre dos conjuntos. Supongamos que tenemos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{\text{Ángel, Bertha, Gabriela, Ronald}\}$, y queremos establecer una relación entre dichos conjuntos, de modo que a cada número del conjunto A, en orden creciente, le asignamos el nombre de una persona del conjunto B, en orden alfabético. Así, podemos establecer el siguiente esquema:

Representamos este esquema mediante pares ordenados, esto es,

(1; Ángel), (2; Bertha), (3; Gabriela), (4; Ronald)

Nótese que la correspondencia establecida determina un subconjunto del conjunto $A \times B$. A este subconjunto lo denotaremos con:

$$R = \{(1;\ \text{Ángel}), (2;\ \text{Bertha}), (3;\ \text{Gabriela}), (4;\ \text{Ronald})\}$$

Es claro que la relación establecida no es única, ya que se puede establecer otras relaciones (correspondencias) entre los dos conjuntos. La definición formal de relación se presenta a continuación.

www.FreeLibros.com

DEFINICIÓN 1. Sean A y B dos conjuntos. Una relación R de A en B es un subconjunto de $A \times B$, es decir, $R \subset A \times B$.
Esta relación R de A en B se denota por $R: A \to B$.

OBSERVACIÓN 1. *Sea la relación $R: A \to B$, entonces:*

1. *El conjunto A se llama* ***conjunto de partida*** *y el conjunto B,* ***conjunto de llegada.***
2. *Si $(x; y) \in R$, se dice que x está en relación con y mediante R.*
   También se representa por $x\,R\,y$.
3. *Como $\emptyset \subset A \times B$, $\emptyset$ es una relación de A en B y es llamada* ***relación nula.***
4. *Se dice que R es una* ***relación en A*** *si $R \subset A \times A$.*

EJEMPLO 1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, determine por extensión las relaciones R y S definidas por:

$$R = \{(x;\ y) \in A \times B \ /\ y = x + 2\}$$
$$S = \{(x;\ y) \in A \times B \ /\ y > x + 2\}$$

Solución.
Se tiene

$$R = \{(1;\ 3), (2;\ 4), (3;\ 5), (4;\ 6)\}$$
$$S = \{(1;\ 4), (1;\ 5), (1;\ 6), (2;\ 5), (2;\ 6), (3;\ 6)\}$$

Los diagramas de las relaciones R y S se muestran en las figuras 2.1 y 2.2, respectivamente.

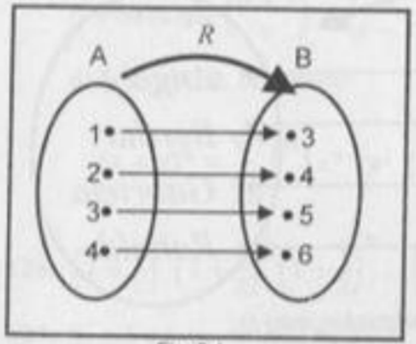


Fig. 2.1

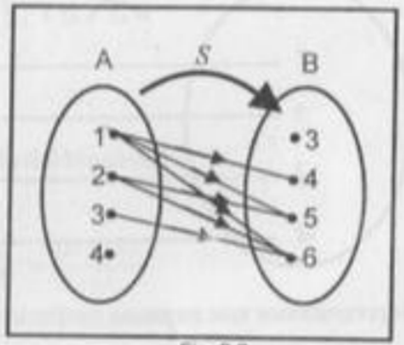


Fig. 2.2

2.1.1 DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA DE UNA RELACION

Sea R una relación de A en B ($R: A \to B$, con $R \neq \emptyset$).

El **dominio** de R es el conjunto $Dom(R) = \{x \in A \ /\ (x; y) \in A \times B\} \subset A$.
Esto es, el dominio de R es el subconjunto A cuyos elementos son las primeras componentes de todos los pares ordenados que pertenecen a R.

El **rango** o **contradominio** de R es el conjunto

$$Rang(R) = \{y \in B \ /\ (x; y) \in A \times B\} \subset B$$

Esto es, el rango de R es el subconjunto B formado por las segundas componentes de todos los pares ordenados que pertenecen a R.

Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la **gráfica** de la relación R es el conjunto

$$Gráf(R) = \{(x;\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ /\ (x;\ y) \in R\}$$

Usualmente el dominio de R se ubica en el eje horizontal y el rango en el eje vertical.

Los dominios y rangos de las relaciones definidas en el ejemplo 1 son:

$$Dom(R) = \{1, 2, 3, 4\} = A\ ,\quad Rang(R) = \{3, 4, 5, 6\} = B$$
$$Dom(S) = \{1, 2, 3\}\ ,\quad Rang(S) = \{4, 5, 6\}$$

Las gráficas de R y S se muestran en las figuras 2.3 y 2.4, respectivamente.

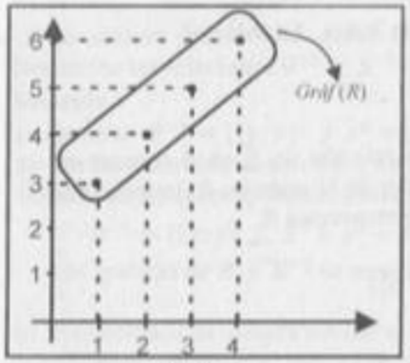


Fig. 2.3

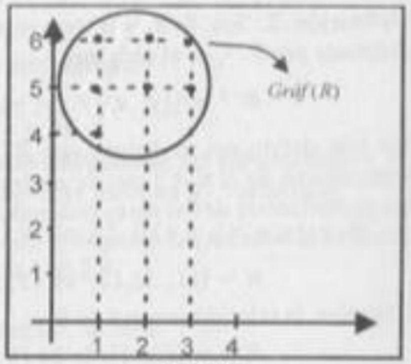


Fig. 2.4

En la mayor parte de este libro se utilizarán relaciones en $\mathbb{R}$, es decir, las relaciones de A en B donde A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Sean R y S dos relaciones definidas por:
$R = \{(x;\ y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ /\ x^2 + y^2 \leq 9\}$ y $S = \{(x;\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ /\ x^2 + y^2 \leq 9\}$
Halle los dominios y rangos de estas relaciones y trace sus gráficas.

Solución.

a) $R = \{(1;\ 1), (2;\ 2), (1;\ 2), (2;\ 1)\}$
   $Dom(R) = \{1;\ 2\} = Rang(R)$. La gráfica se muestra en la Fig. 2.5.

b) Como $x^2 + y^2 = 9$ representa una circunferencia con centro en el origen y de radio 3, la gráfica de S está formada por los puntos de la circunferencia y también por los puntos interiores a la misma. Además, se tiene:
   $Dom(S) = [-3;\ 3] = Rang(S)$. La gráfica se muestra en la Fig. 2.6.

www.FreeLibros.com

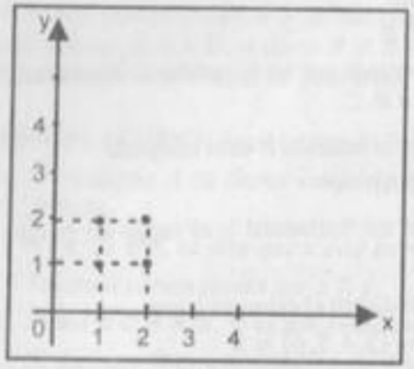


Fig. 2.5

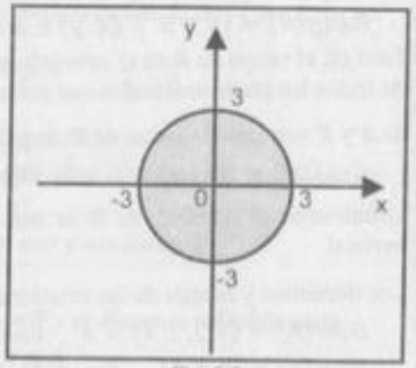


Fig. 2.6

2.2 RELACIÓN INVERSA

Definición 2. Sea $R: A \to B$ una relación no vacía. La relación inversa de R, denotada por R^{-1}, es el conjunto

$$R^{-1} = \{(y;\ x)\ /\ (x;\ y) \in R\}$$

De esta definición se deduce que R^{-1} es la relación de B en A (porque es un subconjunto de $B \times A$) que se obtiene a partir de la relación R, intercambiando las componentes de los pares ordenados que pertenecen a R.
Sea R es la relación del ejemplo 1, esto es,

$$R = \{(1;\ 3), (2;\ 4), (3;\ 5), (4;\ 6)\}$$

Entonces, la relación inversa de R es

$$R^{-1} = \{(3;\ 1), 4;\ 2), (5;\ 3), (6;\ 4)\}$$

PROPIEDADES. De la definición de la relación inversa R^{-1}, se tiene:

1. $(y;\ x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x;\ y) \in R$
2. $Dom(R^{-1}) = Rang(R)$ y $Rang\ (R^{-1}) = Dom(R)$
3. $(R^{-1})^{-1} = R$ (la relación inversa de R^{-1} es R)

2.2.1 RELACIÓN ENTRE LAS GRÁFICAS DE R Y R^{-1}

Si R es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces, de la propiedad 1:

$$(a;\ b) \in R \Leftrightarrow (b;\ a) \in R^{-1}$$

Los puntos $P(a; b)$ y $Q(b; a)$ son simétricos con respecto a la recta $y = x$. (Fig. 2.7). De ello se concluye que las gráficas de R y R^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$ (Fig. 2.8).

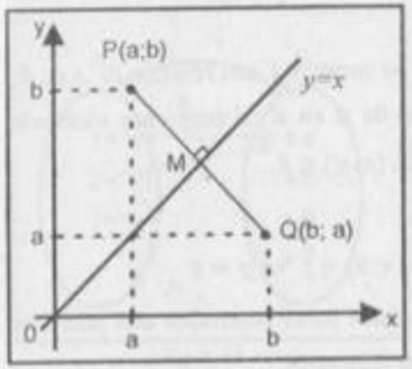


Fig. 2.7

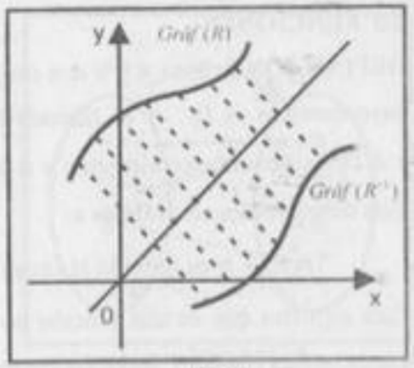


Fig. 2.8

EJEMPLO 3. Sean R y S relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por

$$R = \{(x; y)\ /\ x^2 + y^2 - 4y = 0\}$$
$$S = \{(x; y)\ /\ x \leq y\}$$

Determine las relaciones R^{-1} y S^{-1} y trace sus gráficas.

Solución

a) Se tiene $R^{-1} = \{(y; x)\ /\ x^2 + y^2 - 4y = 0\}$
Por la costumbre de escribir x en la primera componente del par ordenado e y en la segunda componente, intercambiando estas letras en R^{-1} se obtiene
$$R^{-1} = \{(x; y)\ /\ x^2 + y^2 - 4x = 0\} = \{(x; y)\ /\ (x-2)^2 + y^2 = 4\}$$
Las gráficas de R y R^{-1} se muestran en la Fig. 2.9.

b) Procediendo de manera similar al caso anterior, se tiene
$$S^{-1} = \{(x; y)\ /\ y \leq x\}$$

En la Fig. 2.10 se muestran las gráficas de S y S^{-1}.

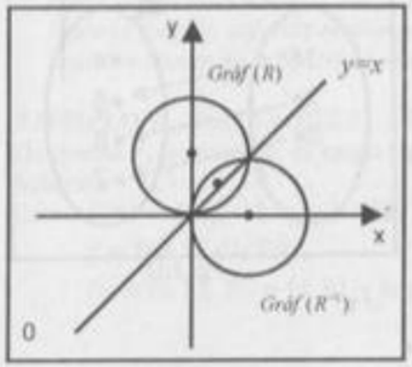


Fig. 2.9

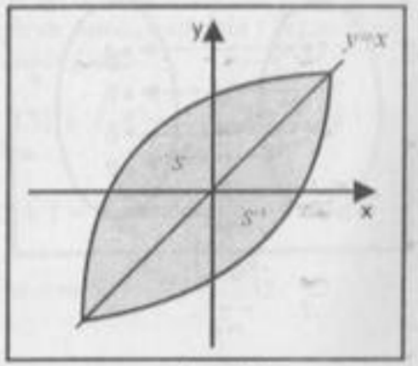


Fig. 2.10

www.FreeLibros.com

2.3 FUNCIONES

DEFINICIÓN 3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y f una relación de A en B, cuyo dominio es D_f. f es llamada **función de A en B**, si para cada elemento $x \in D_f$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $(x;y) \in f$.

Esta definición es equivalente a

$$f: A \to B \text{ es función si } (x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y = z$$

Esto significa que en una función no existen dos pares ordenados con primeras componentes iguales y segundas componentes diferentes.

Ejemplo 4. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$ y las relaciones de A en B

$f_1 = \{(1;4),(2;5),(3;6),(2;7)\}$

$f_2 = \{(1;5),(2;6),(3;7)\}$

$f_3 = \{(1;4),(2;4)\}$

$f_4 = \{(1;4),(2;4),(3;7)\}$

Entonces,

1. f_1 no es función de A en B, porque al elemento 2 le corresponden dos elementos (5 y 7) de B. El diagrama se muestra en la Fig. 2.11.
2. f_2 es función de A en B (Fig. 2.12).
3. f_3 es función de A en B (Fig. 2.13).
4. f_4 es función de A en B (Fig. 2.14).

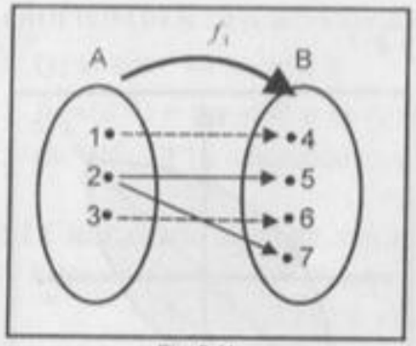


Fig. 2.11

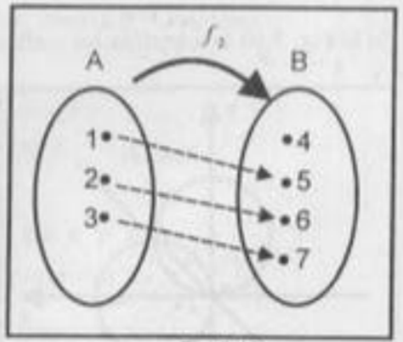


Fig. 2.12

www.FreeLibros.com

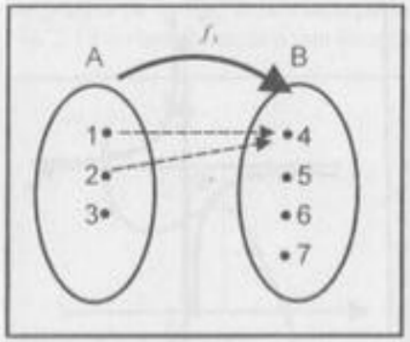


Fig. 2.13

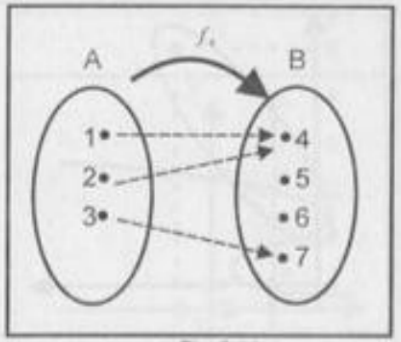


Fig. 2.14

OBSERVACIÓN 2. *Sea $f: A \to B$ una función.*

1. *Si $(x;y) \in f$, se escribe $y = f(x)$ (se lee "y es igual a f de x") y se dice que y* ***es el valor de f en x****. En este caso, x es llamada* ***variable independiente*** *e y* ***variable dependiente.***
2. *Como f es también una relación, los conceptos de dominio (D_f), rango (R_f) y gráfica de f (G_f) son los mismos establecidos en la sección anterior. Al rango de f también se le conoce como* ***recorrido*** *de f ó* ***imagen*** *de f $(Img\ f)$.*
3. *Si $D_f = A$, $f: A \to B$ es llamada* ***aplicación*** *de A en B. Si además $R_f = B$, se dice que f es* ***aplicación*** *de A* ***sobre*** *B. En algunos textos se definen funciones como aplicaciones.*
4. *Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f: A \to B$ es llamada* ***función real de variable real****. En dicho caso, la gráfica de f se representa en el plano cartesiano. En lo que sigue, salvo que se indique lo contrario, se usarán funciones de variable real.*
5. *Sea $f: A \to B$ una función real de variable real, definida por la* ***regla de correspondencia*** *$y = f(x)$. Cuando no se especifica el dominio de f, se considerará que su dominio es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ para los cuales la regla de correspondencia tenga sentido y dé valores reales. En la práctica, dada la función definida mediante la regla de correspondencia $f(x)$ se habla indistintamente de la función f o de la función $f(x)$.*

EJEMPLO 5. Sean $A = \{0,2,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ y $f: A \to B$ / $f(x) = 2x + 1$. Determine f, su dominio, su rango y su gráfica.

Solución

Como $f(0) = 2(0) + 1 = 1$ y $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, entonces

$f = \{(0;1),(2;5)\}$

$D_f = \{0,2\}$, $R_f = \{1,5\}$ y la gráfica se muestra en la Fig. 2.15.

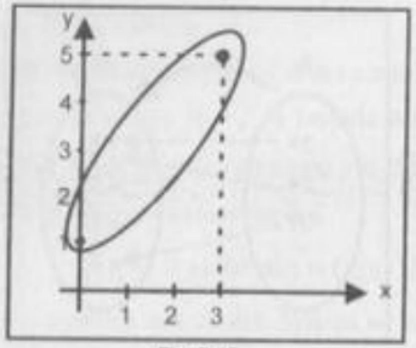


Fig. 2.15

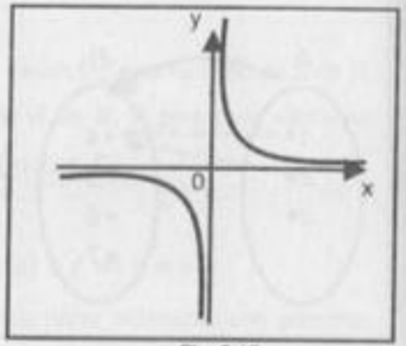


Fig. 2.16

EJEMPLO 6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Halle el dominio y la gráfica de f.

Solución

La expresión $\dfrac{1}{x}$ tiene sentido si $x\neq 0$, es decir, $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.16. De ésta se deduce que el rango de f es tambien $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$.

EJEMPLO 7. La función $f:[1;4\rangle\to[1;5\rangle$ definida por $f(x)=(x-2)^2+1$, es una aplicación de $[1;4\rangle$ sobre $[1;5\rangle$. En este caso, la imagen de $[1;4\rangle$ es $[1;5\rangle$ y se escribe $f([1;4\rangle)=[1;5\rangle$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.17.

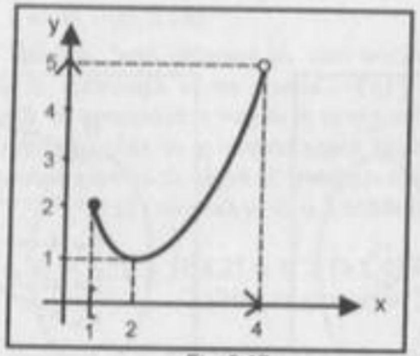


Fig. 2.17

OBSERVACIÓN 3. *Una relación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cuyo dominio está en el eje horizontal y el rango en el eje vertical, es función si y sólo si toda recta vertical interseca a su gráfica a lo más en un punto.*

www.FreeLibros.com

La gráfica de la Fig. 2.18 corresponde a una función, mientras que aquélla de la Fig. 2.19 no corresponde a una función.

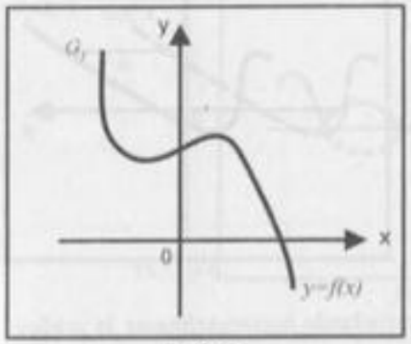


Fig. 2.18

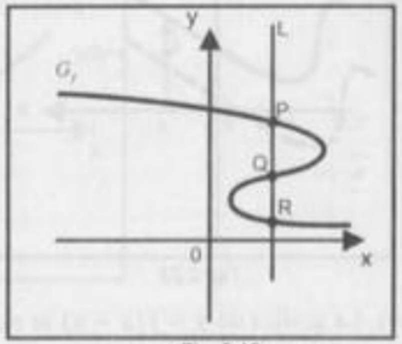


Fig. 2.19

Para construir la gráfica de una función a partir de otra más simple, es conveniente tener en cuenta las relaciones entre las gráficas de $y=f(x)$ con las gráficas de:

a) $y=-f(x)$ b) $y=f(x)+k$ c) $y=f(x-h)$

d) $y=f(x-h)+k$ e) $y=f(-x)$ f) $y=|f(x)|$

Supongamos que la gráfica de $y=f(x)$ ("gráfica original") es la que se muestra en la Fig. 2.20.

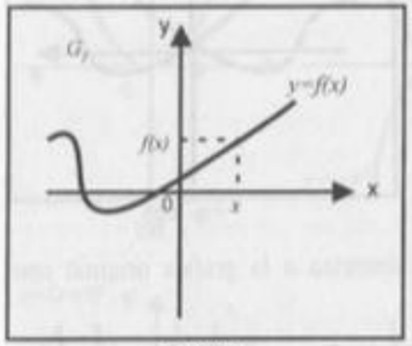


Fig. 2.20

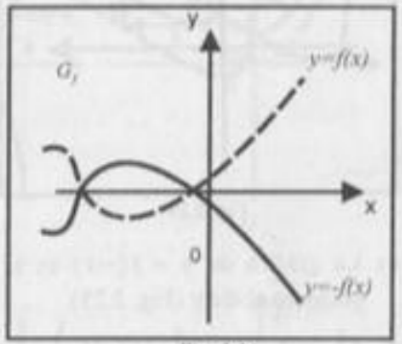


Fig. 2.21

Entonces:

a) La gráfica de $y=-f(x)$ es la función simétrica a la gráfica original con respecto al eje x (Fig. 2.21).

b) La gráfica de $y=f(x)+k$ se obtiene trasladando verticalmente la gráfica original k unidades. Si $k>0$, la gráfica se traslada hacia arriba y si $k<0$, hacia abajo (Fig. 2.22).

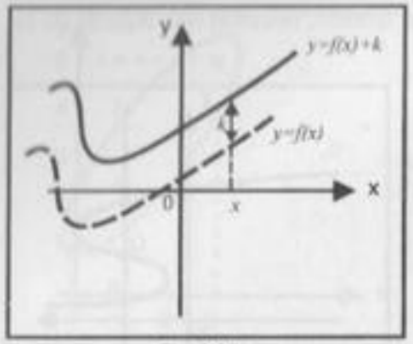


Fig. 2.22

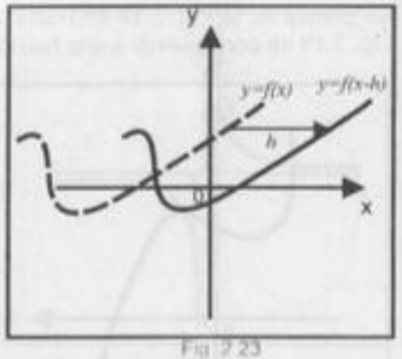


Fig. 2.23

c) La gráfica de $y = f(x - h)$ se obtiene trasladando horizontalmente la gráfica original h unidades. Si $h > 0$, la gráfica se traslada hacia la derecha y si $h < 0$, hacia la izquierda (Fig. 2.23).

d) La gráfica de $y = f(x - h) + k$ se obtiene efectuando una doble traslación, h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente (Fig. 2.24).

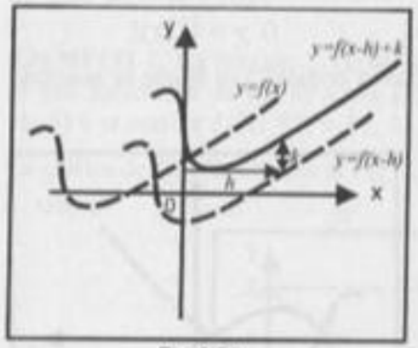


Fig. 2.24

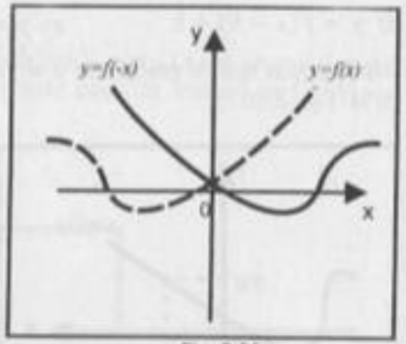


Fig. 2.25

e) La gráfica de $y = f(-x)$ es la curva simétrica a la gráfica original con respecto al eje y (Fig. 2.25).

f) La gráfica de $y = |f(x)|$ se obtiene trasladando aquella parte de la gráfica original que se encuentra por debajo del eje x ($f(x) < 0$) de manera simétrica a este último y manteniendo la parte de la gráfica que está por encima del eje x ($f(x) > 0$) (Fig. 2.26).

www.FreeLibros.com

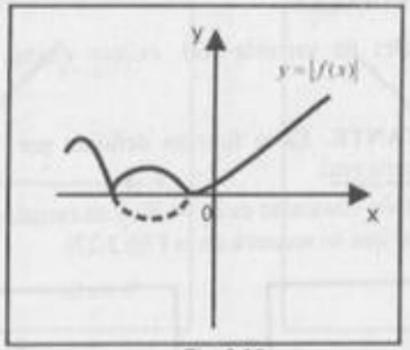
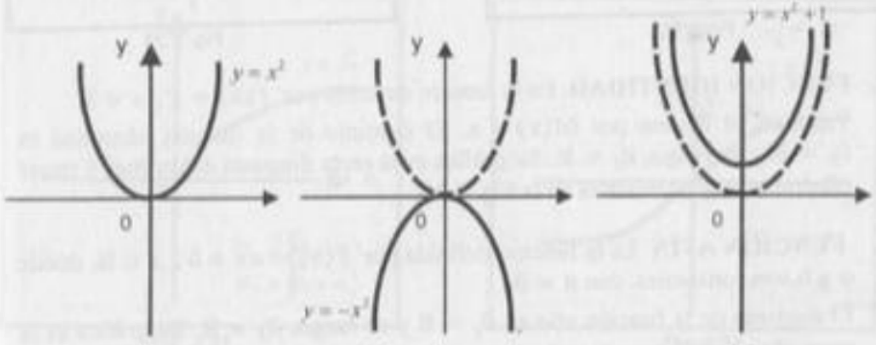


Fig. 2.26

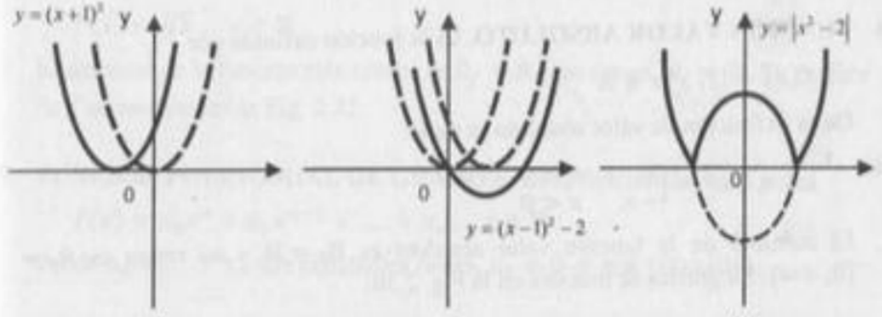
EJEMPLO 8. Trace las gráficas de cada una de las funciones definidas por:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = (x + 1)^2$ e) $f(x) = (x - 1)^2 - 2$ f) $f(x) = |x^2 - 2|$



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

2.4 FUNCIONES ESPECIALES

Entre las funciones reales de variable real, existen ciertas funciones de uso frecuente. Éstas son:

1. **FUNCIÓN CONSTANTE.** Es la función definida por $f(x) = c\,,\; x \in \mathbb{R}$, donde c es una constante real.

   El dominio de la función constante es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango, $R_f = \mathbb{R}$. Su gráfica es una recta horizontal que se muestra en la Fig. 2.27.

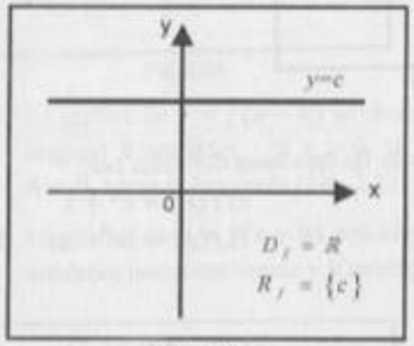


Fig. 2.27

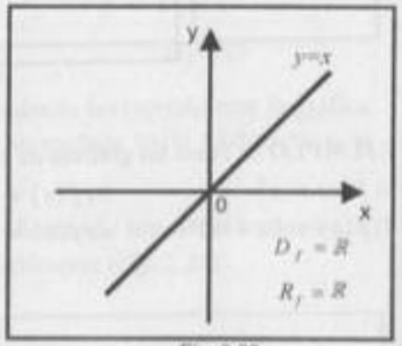


Fig. 2.28

2. **FUNCION IDENTIDAD.** Es la función definida por $f(x) = x\,,\; x \in \mathbb{R}$. También se denota por $Id(x) = x$. El dominio de la función identidad es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango, $R_f = \mathbb{R}$. Su gráfica es la recta diagonal del primer y tercer cuadrante, que se muestra en la Fig. 2.28.

3. **FUNCIÓN AFÍN** Es la función definida por $f(x) = ax + b\,,\; x \in \mathbb{R}$, donde a y b son constantes, con $a \neq 0$.

   El dominio de la función afín es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango, $R_f = \mathbb{R}$. Su gráfica es la recta de pendiente a y que interseca al eje de las ordenadas en $(0; b)$ (Fig. 2.29). Si $b = 0$, la recta pasa por el origen.

4. **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.** Es la función definida por

   $$f(x) = |x|\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

   De la definición de valor absoluto se tiene:

   $$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

   El dominio de la función valor absoluto es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = [0; +\infty)$. Su gráfica se muestra en la Fig. 2.30.

www.FreeLibros.com

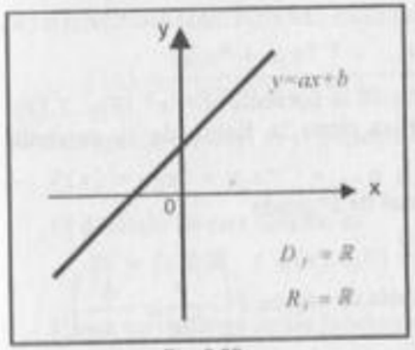


Fig. 2.29

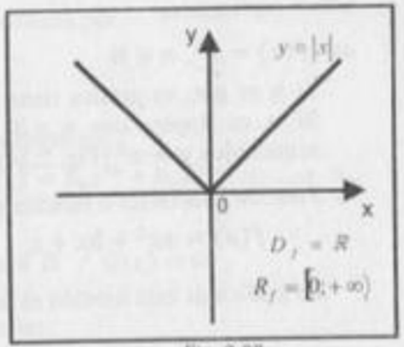


Fig. 2.30

5. **FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.** Es la función definida por

   $$f(x) = \sqrt{x}\,,\quad x \geq 0$$

   La gráfica es la porción de la parábola $y^2 = x$ que se encuentra en el primer cuadrante (Fig. 2.31).

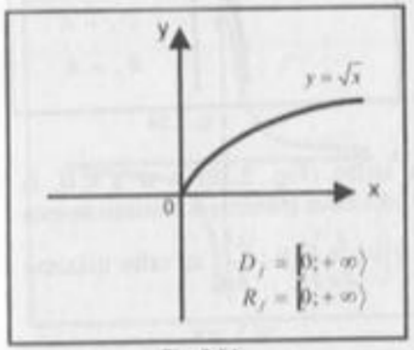


Fig. 2.31

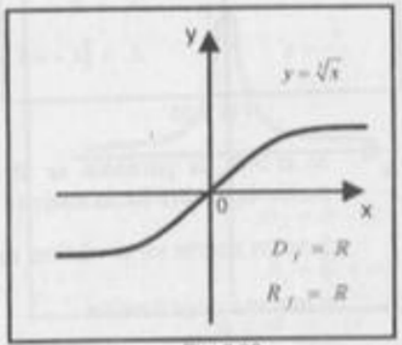


Fig. 2.32

6. **FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA.** Es la función definida por

   $$f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

   El dominio de la función raíz cúbica es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango, $R_f = \mathbb{R}$. Su gráfica de f se muestra en la Fig. 2.32.

7. **FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO n.** Es la función definida por

   $$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

   donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes reales, $a_0 \neq 0$ y $n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Casos particulares:

a) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

Si n es par, su gráfica tiene la forma de la parábola $y = x^2$ (Fig. 2.33). Si n es impar, con $n \geq 3$, su gráfica tiene la forma de la parábola semicúbica $y = x^3$ (Fig. 2.34).

b) Función cuadrática o función polinomial de 2° grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

La gráfica de esta función es una parábola de vértice $V\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$

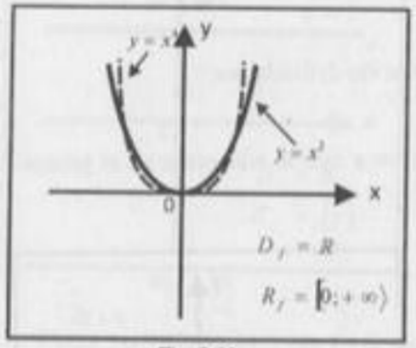


Fig. 2.33

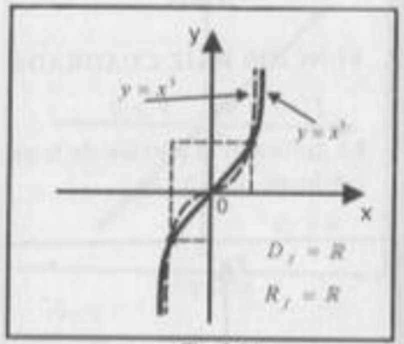


Fig. 2.34

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (Fig. 2.35) y si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (Fig. 2.36). El valor máximo o mínimo de esta función ocurre en el vértice, es decir, $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = c - \dfrac{b^2}{4a}$ es valor máximo o mínimo de la función.

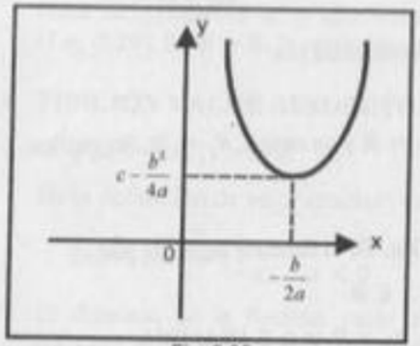


Fig. 2.35

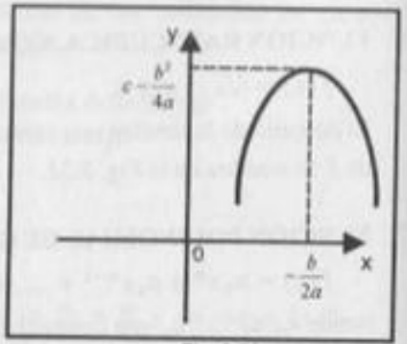


Fig. 2.36

www.FreeLibros.com

8. **FUNCIÓN RACIONAL.** Es la función definida por

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

La función racional es el cociente de los polinomios

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ y $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$

El dominio de esta función es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}\ /\ Q(x) = 0\}$$

Casos particulares de las funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$

Si n es impar, su gráfica es similar a la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ (Fig. 2.37). Si n es par, su gráfica es similar a la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$ (Fig. 2.38).

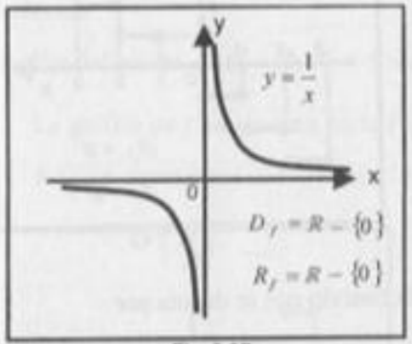


Fig. 2.37

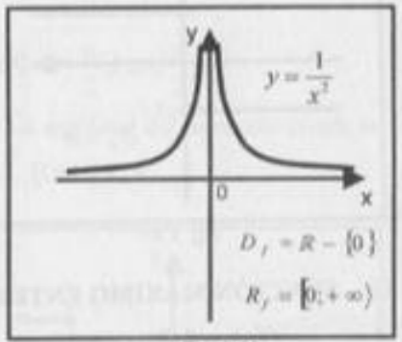


Fig. 2.38

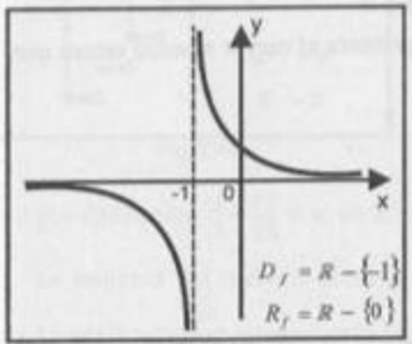


Fig. 2.39

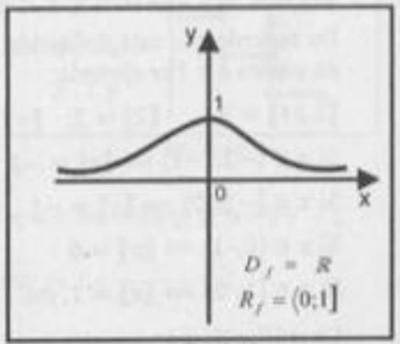


Fig. 2.40

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Si n es impar, su gráfica tiene un comportamiento similar a la curva que se muestra en la Fig. 2.39. Si n es par, su gráfica tiene un comportamiento similar a la curva que se muestra en la Fig. 2.40.

9. FUNCIÓN SIGNO. Es la función que se denota por

$f(x) = \text{Sgn}(x), x \in \mathbb{R}$

Se lee **signo de** x y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la Fig. 2.41.

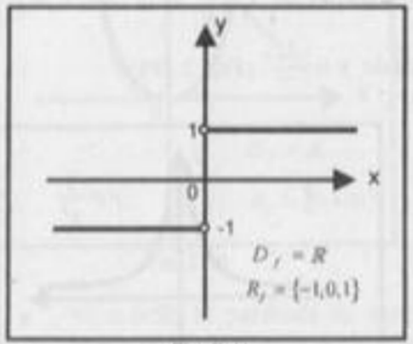


Fig. 2.41

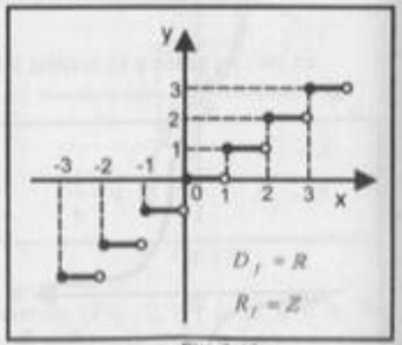


Fig. 2.42

10. FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO. Es la función que se denota por

$f(x) = [\![x]\!]$

Se lee **entero de** x y está definida por

$[\![x]\!] = n$ sí y solo si $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

De acuerdo con esta definición, $[\![x]\!]$ representa al mayor número entero que no supera a x. Por ejemplo:

$[\![3.24]\!] = 3$, $\quad [\![2]\!] = 2$, $\quad [\![-1;5]\!] = -2$

Si $x \in [-2; -1\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -2$

Si $x \in [-1; 0\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -1$

Si $x \in [0; 1\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 0$

Si $x \in [1; 2\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 1$, etc.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.42.

Entre las propiedades del máximo entero de x podemos mencionar a:

1. $x - 1 < [\![x]\!] \le x$
2. Si $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\![x+m]\!] = [\![x]\!] + m$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3. Si $f(x) = [\![ax]\!]$, con $a \neq 0$, la longitud del intervalo donde la función permanece constante es $l = \dfrac{1}{|a|}$, pues

$[\![ax]\!] = n \Leftrightarrow n \le ax < n+1$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{a} \le x < \frac{n}{a} + \frac{1}{a}, \text{ si } a > 0 \text{ ó } \frac{n}{a} \ge x > \frac{n}{a} + \frac{1}{a}, \text{ si } a < 0$$

En ambos casos, la longitud del intervalo es $l = \left|\dfrac{n}{a} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{n}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$

EJEMPLO 9. Trace las gráficas de las funciones definidas por

a) $f(x) = [\![2x]\!]$ $\qquad$ b) $g(x) = \left[\!\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right]$

Solución

a) Por definición, $[\![2x]\!] = n \Leftrightarrow n \le 2x < n+1 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} \le x < \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.43. La amplitud del intervalo donde la función permanece constante es $l = \dfrac{1}{[illegible]} = \dfrac{1}{[illegible]}$.

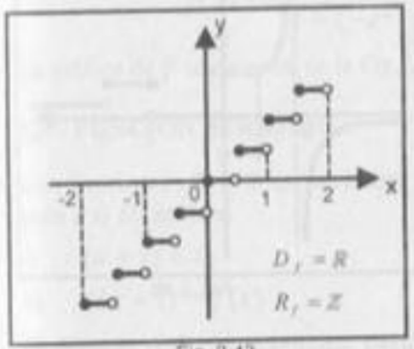


Fig. 2.43

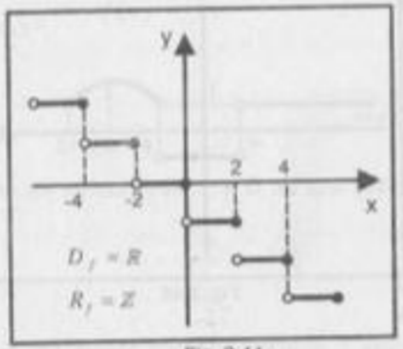


Fig. 2.44

b) Por definición, $\left[\!\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right] = n \Leftrightarrow n \le -\dfrac{x}{2} < n+1 \Leftrightarrow -2n \ge x > -2n-2$.

La amplitud del intervalo donde g es contante es $l = \dfrac{1}{|-1/2|} = 2$.

La gráfica de g se muestra en la Fig. 2.44.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 10. Trace las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - |x-8|}\,, & x \in [4;12] \\ \text{Sgn}(x^2 - 16)\,, & x < 4 \text{ ó } x > 12 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right], & x \in [-1;3] \\ \dfrac{1}{x+2}, & x < -1 \text{ ó } x > 3 \ \wedge \ x \neq -2 \end{cases}$

Solución

a) De la definición de valor absoluto y de la definición de signo, se tiene

$$|x-8| = \begin{cases} x-8\,, & \text{si } x \geq 8 \\ 8-x\,, & \text{si } x < 8 \end{cases} \ ; \ \text{Sgn}(x^2-16) = \begin{cases} 1\,, & x > 4 \text{ ó } x < -4 \\ 0\,, & x = 4 \text{ ó } x = -4 \\ -1\,, & -4 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } f(x) = \begin{cases} 1\,, & x < -4 \ \vee \ x > 12 \\ 0\,, & x = -4 \\ -1\,, & -4 < x < 4 \\ \sqrt{x-3}\,, & 4 \leq x < 8 \\ \sqrt{13-x}\,, & 8 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.45.

b) La gráfica de g se muestra en la Fig. 2.46.

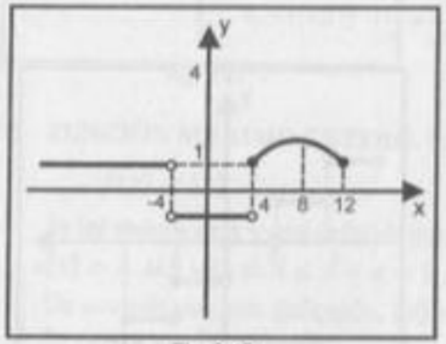


Fig. 2.45

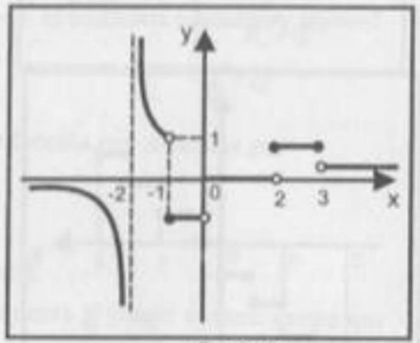


Fig. 2.46

2.5 FUNCIÓN PAR Y FUNCIÓN IMPAR

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada **función par** si para todo $x \in D_f$ se verifica
$-x \in D_f$ y $f(-x) = f(x)$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada **función impar** si para todo $x \in D_f$ se verifica
$-x \in D_f$ y $f(-x) = -f(x)$

www.FreeLibros.com

OBSERVACIÓN 4.

1. La gráfica de toda función par es simétrica con respecto al eje y.

2. La gráfica de toda función impar es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 11. La función definida por $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, es función par, pues para cada $x \in D_f = \mathbb{R}$ se cumple que $-x \in D_f$ y $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$. La gráfica se muestra en la Fig. 2.47.

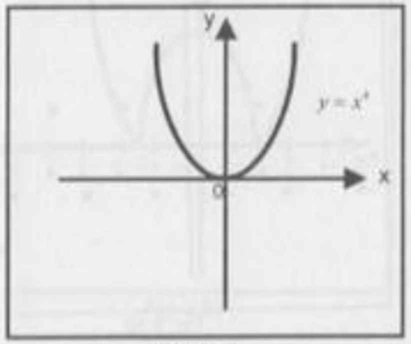


Fig. 2.47

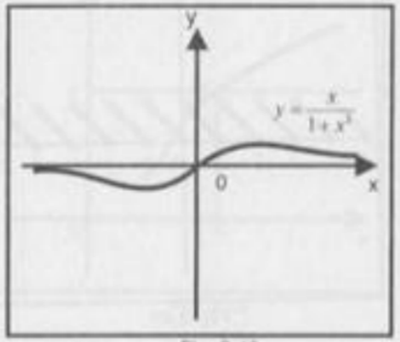


Fig. 2.48

EJEMPLO 12. La función definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, es impar, pues si $x \in D_f = \mathbb{R}$, entonces $-x \in D_f$ y

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x^2)} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$$

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.48.

2.6 FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **periódica** si existe un número real $t \neq 0$ tal que para todo $x \in D_f$ se tiene

i) $(x+t) \in D_f$

ii) $f(x+t) = f(x)$

El número real t se denomina **periodo** de f. El menor número positivo T que satisface las condiciones i) y ii) se denomina período de f y, en este caso, se dice que f es una función periódica de período T.

EJEMPLO 13. Son ejemplos de funciones periódicas, las funciones:

a) $f(x) = x - [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$ **(función mantiza)**

b) $g(x) = (-1)^x$, $x \in \mathbb{Z}$

En el primer caso se tiene

$$f(x+1) = (x+1) - [\![x+1]\!] = x + 1 - ([\![x]\!] + 1) = x - [\![x]\!] = f(x)$$

Como no existe otro número real t con $0 < t < 1$ y que sea período de f, f es de período 1. La gráfica de la función mantiza se ilustra en la Fig. 2.49.

En el segundo caso, g es de período 2 y su gráfica se muestra en la Fig. 2.50.

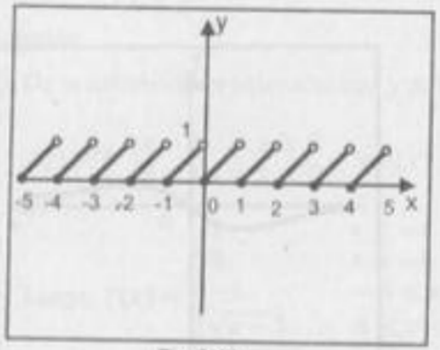


Fig. 2.49

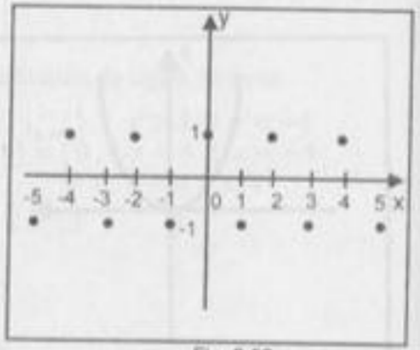


Fig. 2.50

2.7 FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE

a) Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **creciente** en el intervalo I si para cada par

$x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (Fig. 2.51)

b) Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en el conjunto I si para cada par

$x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (Fig. 2.52)

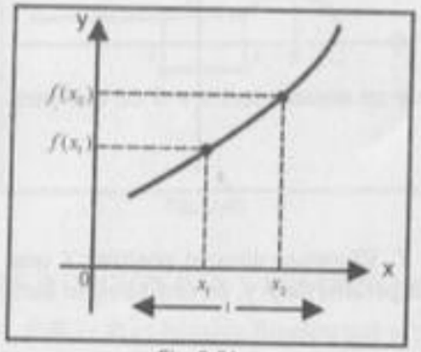


Fig. 2.51

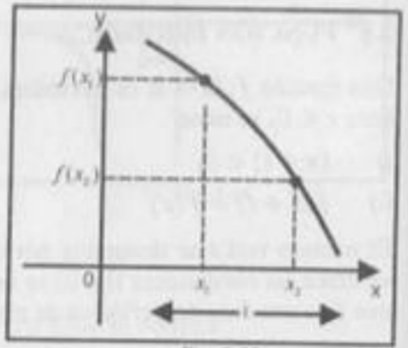


Fig. 2.52

Se observa que una función es creciente si su gráfica es ascendente (de izquierda a derecha), y es decreciente si su gráfica es descendente.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 14. La función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$, cuya gráfica se muestra en la Fig. 2.53, es creciente en los intervalos $\langle -2; 0 \rangle$ y $\langle 2; +\infty \rangle$, y decreciente en los intervalos $\langle -\infty; -2 \rangle$ y $\langle 0; 2 \rangle$.

Los intervalos de crecimiento (intervalos donde la función es creciente o decreciente) son intervalos abiertos.

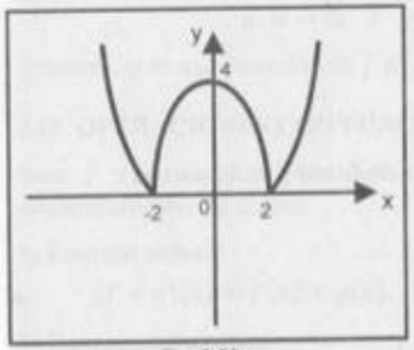


Fig. 2.53

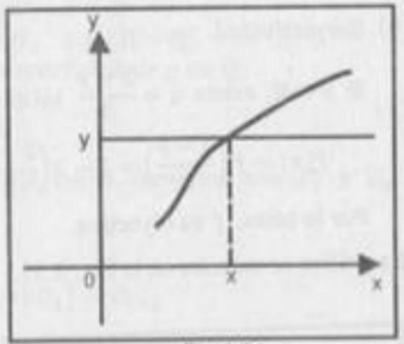


Fig. 2.54

2.8 FUNCIÓN INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

Una función $f: A \to B$ es **inyectiva** si

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2\,, \quad \forall\, x_1, x_2 \in D_f$$

Esta definición es equivalente a:

$$\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)\,, \text{con } x_1 \neq x_2, \text{ se tiene que } f(x_1) \neq f(x_2)$$

A la función inyectiva se le conoce también como función **univalente** o **uno a uno**, porque hay una correspondencia uno a uno entre los elementos del dominio y del rango.

Geométricamente, una función real de variable real definida por $y = f(x)$ es inyectiva si al trazar rectas paralelas al eje x, éstas intersecan a su gráfica a lo más en un punto (Fig. 2.54).

Una función $f: A \to B$ es **suryectiva** o **sobre** si

$$\forall\, y \in B \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

En otras palabras, $f: A \to B$ es suryectiva si el rango de f es B.

Una función $f: A \to B$ es **biyectiva** si y solo si es inyectiva y suryectiva.

EJEMPLO 15. Determine si la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 3x$ es biyectiva.

Solución

a) Inyectividad.

Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $2 - 3x_1 = 2 - 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Luego, f es inyectiva.

b) Suryectividad.

Si $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \dfrac{2-y}{3}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{2-y}{3}\right) = 2 - 3\left(\frac{2-y}{3}\right) = y, \text{ de donde } f \text{ es suryectiva.}$$

Por lo tanto, f es biyectiva.

La gráfica se muestra en la Fig. 2.55.

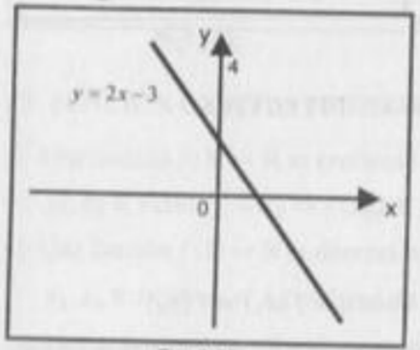


Fig. 2.55

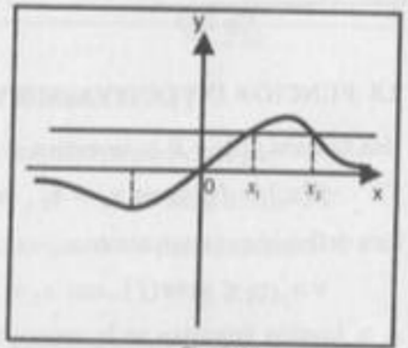


Fig. 2.56

EJEMPLO 16. ¿$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ es inyectiva?

Solución

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1}{1+{x_1}^2} = \dfrac{x_2}{1+{x_2}^2} \Leftrightarrow x_1 + x_1{x_2}^2 = x_2 + x_2{x_1}^2$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ó } x_2 = \frac{1}{x_1}$$

Luego, f no es inyectiva. La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.56.

www.FreeLibros.com

2.9 EXTENSIÓN Y RESTRICCIÓN DE UNA FUNCIÓN

Sean $f: A \to B$ y $g: A_1 \to B_1$ dos funciones tales que $A \subset A_1$ y $B \subset B_1$. Se dice que g es una **extensión** de f ó f es una **restricción** de g si

$$Dom(f) \subseteq Dom(g) \text{ y } f(x) = g(x), \ \forall x \in Dom(f)$$

EJEMPLO 17. Sean $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ / $f(x) = x^2$ y

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Entonces, g es una extensión de f ó f es una restricción de g en $\mathbb{Q}$.

2.10 OPERACIONES CON FUNCIONES

Sean f y g dos funciones de variable real cuyos dominios son D_f y D_g, respectivamente. Se define:

a) **Función suma:**

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ x \in (D_f \cap D_g) = D_{f+g}$$

b) **Función diferencia:**

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \ x \in (D_f - D_g) = D_{f-g}$$

c) **Función producto:**

$$(f.g)(x) = f(x).g(x), \ x \in (D_f \cap D_g) = D_{f.g}$$

e) **Función cociente:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ x \in [D_f \cap (D_g - \{x \ / \ g(x) \neq 0\})] = D_{f/g}$$

f) **Función valor absoluto:**

$$|f|(x) = |f(x)|, \ x \in D_f$$

g) **Producto de una constante por una función:**

$$(cf)(x) = cf(x), \ x \in D_f \text{ y } c \text{ es una constante real.}$$

EJEMPLO 17. Si $\sqrt{16-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, halle las reglas de correspondencia de las funciones

$$f+g, \quad f-g, \quad f.g, \quad -6f, \quad \frac{f}{g} \quad \text{y} \quad |f|$$

Solución

En primer lugar, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 16 - x^2 \geq 0\} = [-4; 4]$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 1 \geq 0\} = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ y

$D_f \cap D_g = [-4; -1] \cup [1; 4] = D$

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-1},\ x \in D.$

b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{16-x^2} - \sqrt{x^2-1},\ x \in D.$

c) $(f.g)(x) = f(x).g(x) = \sqrt{16-x^2}.\sqrt{x^2-1},\ x \in D.$

d) $(-6f)(x) = -6f(x) = -6\sqrt{16-x^2}\ ,\ x \in [-4;4].$

e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x \in [-4;-1\rangle \cup \langle 1;4]\ .$

f) $|f|(x) = |f(x)| = \left|\sqrt{16-x^2}\right| = \sqrt{16-x^2}\ ,\ x \in [-4;4].$

2.11 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones reales tales que $R_f \cap D_g \neq \emptyset$. La **composición** de g con f, que se designa por $g \circ f$, es la función

$$g \circ f: A \to C\ /\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

El dominio de la función compuesta $g \circ f$ está dado por

$$D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in D_f\ \wedge\ f(x) \in D_g\}$$

En la Fig. 2.57 se ilustra la función compuesta $g \circ f$.

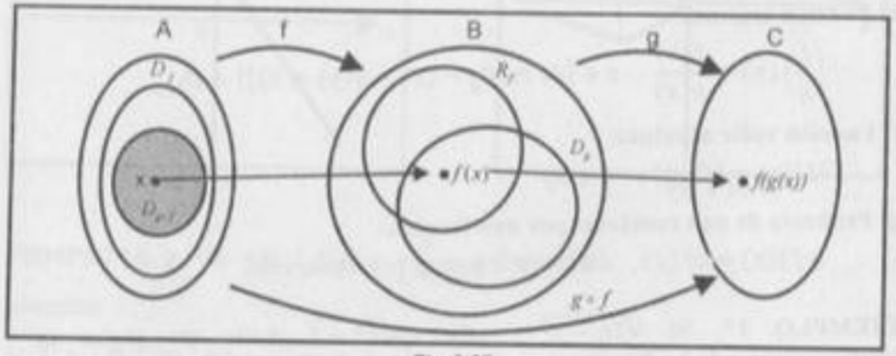


Fig. 2.57

EJEMPLO 19. Sean $f(x) = \frac{x+5}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ dos funciones. Halle

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(f \circ g)(x)$

Solución

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+5}{2}\right) = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$

El dominio de $g \circ f$ es

$$D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in D_f\ \wedge\ f(x) \in D_g\} = \left\{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ \wedge\ \frac{x+5}{2} \geq 0\right\}$$
$$= [-5;+\infty\rangle$$

b) $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}+5}{2})$

El dominio de $f \circ g$ es

$$D_{f \circ g} = \{x\ /\ x \in D_g\ \wedge\ g(x) \in D_f\} = \{x\ /\ x \geq 0\ \wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0;+\infty\rangle$$

Del ejemplo anterior se deduce que la composición de funciones no es conmutativa, es decir, $f \circ g$ y $g \circ f$, generalmente son diferentes.

EJEMPLO 20. Halle las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$, si

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2;2] \quad (1) \\ 3, & x \in \langle 2;5] \quad (2) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 4x+3, & x \in [0;1\rangle \quad (3) \\ 5-2x, & x \in [1;3] \quad (4) \end{cases}$$

Solución

a) Considerando que tanto $f(x)$ como $g(x)$ están definidas de dos formas, entonces existen cuatro posibilidades para $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Para trabajar ordenadamente, enumeramos cada una de las posibilidades con (1), (2), (3) y (4), y operamos separadamente.

(1)-(3): $D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x\ /\ x \in [-2;2] \wedge x^2 \in [0;1\rangle\}$
$= \{x\ /\ x \in [-2;2] \wedge x \in \langle -1;1\rangle\} = \langle -1;1\rangle$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2 + 3$$

(1)-(4): $D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in [-2;2] \wedge x^2 \in [1;3]\} = [-\sqrt{3};-1] \cup [1;\sqrt{3}]$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 5 - 2x^2$$

(2)-(3): $D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in \langle 2;5] \wedge 3 \in [0;1\rangle\} = \emptyset.$

Luego, no existe $(g \circ f)(x)$ en este caso.

(2)-(4): $D_{g \circ f} = \{x\ /\ x \in \langle 2;5] \wedge 3 \in [1;3]\} = \langle 2;5]$

$$(g \circ f)(x) = g(3) = -1$$

En resumen, se tiene

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x^2+3\ , & x \in \langle -1;1\rangle \\ 5-2x^2\ , & x \in [-\sqrt{3};-1] \cup [1;\sqrt{3}] \\ -1\ , & x \in \langle 2;5] \end{cases}$$

www.FreeLibros.com

b) Para $f \circ g$, se procede de manera similar al caso anterior.

(3)-(1): $D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$

$= \{x \ / \ x \in [0;1) \ \wedge \ (4x+3) \in [-2;2]\}$

$= \{x \ / \ x \in [0;1) \ \wedge \ -5/4 \leq x \leq -1/4\} = \emptyset$.

Esto es, no existe $(f \circ g)(x)$ en este caso.

(3)-(2): $D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in [0;1) \wedge (4x+3) \in (2;5]\} = [0;1/2]$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x+3) = 3$

(4)-(1): $D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in [1;3] \wedge (5-2x) \in [-2;2]\} = [3/2;3]$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5-2x) = (5-2x)^2$

(4)-(2): $D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in [1;3] \wedge (5-2x) \in (2;5]\} = [1;3/2)$

$(f \circ g(x) = f(5-2x) = 3$

En resumen, tenemos

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0;1/2] \cup [1;3/2) \\ (5-2x)^2, & x \in [3/2;3] \end{cases}$$

Las gráficas de $g \circ f$ y $f \circ g$ se muestran en las Fig. 2.58 (a) y (b).

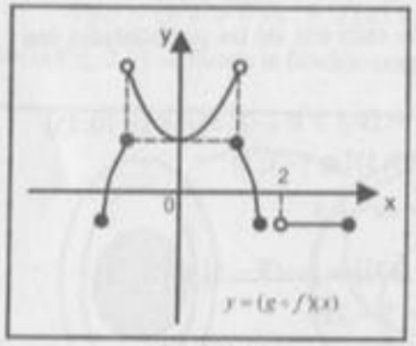


Fig. 2.58 (a)

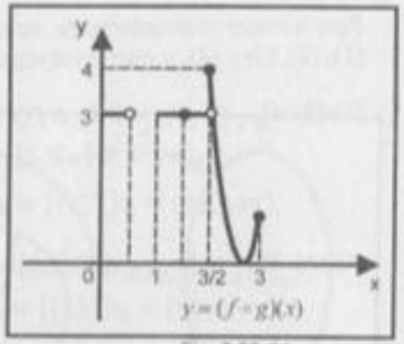


Fig. 2.58 (b)

PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean f, g y h funciones reales con dominios D_f, D_g y D_h, respectivamente. Entonces, tenemos:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
2. $f \circ Id = f = Id \circ f$
3. $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$
4. $(f-g) \circ h = f \circ h - g \circ h$
5. $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$
6. $\left(\frac{f}{g}\right) \circ h = \frac{f \circ h}{g \circ h}$

www.FreeLibros.com

2.12 FUNCIÓN INVERSA

Dada una función $f: A \to B$, ocurre una de las siguientes posibilidades:

f es inyectiva ó f no es inyectiva

Si f no es inyectiva, por lo menos existen dos elementos $x_1, x_2 \in A$ tales que $(x_1; y) \in f \ \wedge \ (x_2; y) \in f$ (Fig. 2.59). Luego, la (relación) inversa de f no es función de B en A.

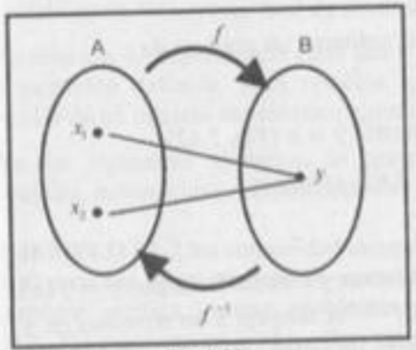


Fig. 2.59

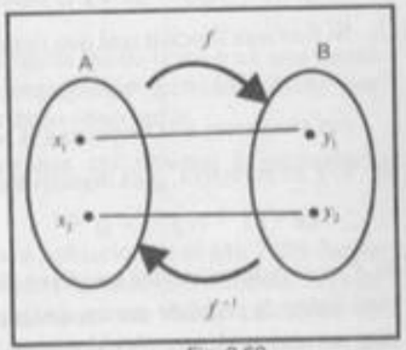


Fig. 2.60

Si $f: A \to B$ es inyectiva (Fig. 2.60), entonces la inversa $f^{-1}: B \to A$ es función inyectiva y es llamada **función inversa** de f.

La interpretación gráfica de la función inversa se ilustra en la Fig. 2.61.

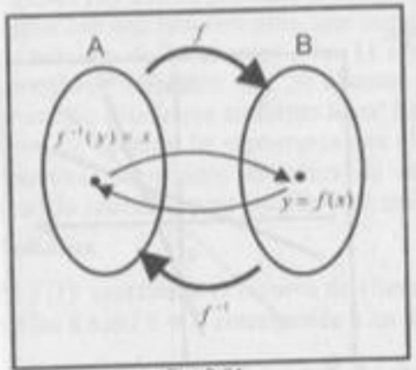


Fig. 2.61

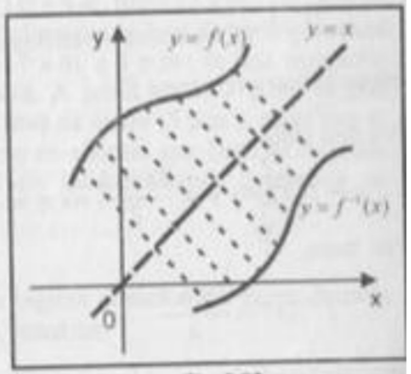


Fig. 2.62

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INVERSA

Las propiedades que caracterizan a la función inversa f^{-1} son:

1. $Dom(f^{-1}) = Rang(f)$ y $Rang(f^{-1}) = Dom(f)$.
2. Una función f tiene inversa si y solo si f es inyectiva. Además, se cumple:
   a) $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ \forall x \in Dom(f)$
   b) $(f \circ f^{-1})(y) = y, \ \forall y \in Dom(f^{-1})$
3. Si f es una función real que tiene inversa, entonces las gráficas de
   $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$
   son simétricas con respecto a la recta bisectriz $y = x$ (Fig. 2.62).
4. Si f es inyectiva, g es inyectiva y existe $g \circ f$, entonces
   $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Si f es una función real que tiene función inversa y está definida por $y = f(x)$, para hallar la regla de correspondencia para f^{-1} se despeja x en términos de y. Así, se obtiene $x = f^{-1}(y)$; pero la costumbre de representar con x la variable independiente y con y la variable dependiente, hace que se escriba como $y = f^{-1}(x)$ (intercambiando x e y en $x = f^{-1}(y)$).

EJEMPLO 21. Halle $f^{-1}(x)$, si $f(x) = \dfrac{3x-1}{2}$.

Solución

$f(x) = \dfrac{3x-1}{2}$ es inyectiva (verifique). Luego, existe la función inversa f^{-1}.

Por otro lado,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{3}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{3}$$

Intercambiando las variables x e y, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$

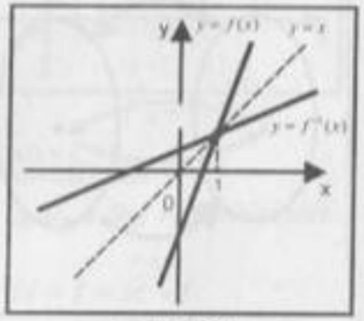


Fig. 2.63

Las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ se muestran en la Fig. 2.63.

www.FreeLibros.com

2.13 APLICACIONES DE FUNCIONES

Uno de los problemas fundamentales de cualquier ciencia es el estudio de la existencia o no de una relación de dependencia entre las variables que intervienen en un proceso y, en el caso de su existencia, saber cómo es esta relación, a fin de obtener algunas conclusiones.

Muchas veces, la existencia de una relación de dependencia es evidente. Sin embargo, el tipo de relación (de qué modo una variable depende de otra u otras variables) no siempre es fácil de obtener.

La relación de dependencia entre dos o más variables puede tener o no una forma matemática definida. Esta relación generalmente puede ser determinada por medio de un modelo matemático ajustado a los datos observados.

En los siguientes ejemplos, se presentan algunas aplicaciones a situaciones sociales, geométricas, económicas, etc.

EJEMPLO 22. Una comunidad campesina, cuya población en el año 2008 fue de 400 personas, tiene una tasa de mortalidad (debido a la mala alimentación, falta de atención médica y otros problemas que aquejan) en un índice calculado en $(t+3)^2$ personas en t años. Con estos datos se puede expresar la población en función de los años transcurridos por:

$$P(t) = 400 - (t+3)^2$$

Para $t = 0$, la población corresponde al año 2008. Se observa que si no se mejora el nivel de vida de dicha comunidad, teóricamente se puede afirmar que luego de 17 años (en 2025) la comunidad desaparece, pues $P(17) = 0$.

EJEMPLO 23. Un mercado abre a las 8 a.m. De 8 a.m. hasta 11 a.m., los clientes llegan con una tasa creciente, que inicia con 5 clientes a la hora de abrir y alcanza un máximo de 20 clientes a las 11 a.m. De 11 a.m. a 1 p.m., la tasa promedio permanece constante con 20 clientes por hora. A partir de la 1 p.m., la tasa promedio disminuye en forma lineal hasta la hora de cierre (5 p.m.), en la que se tiene 12 clientes. Si suponemos que el número de clientes que llega al mercado durante los periodos disjuntos de tiempo son independientes, determine un modelo adecuado para estudiar este caso.

Solución

Si $f(t)$ representa el número de clientes que ingresa al mercado t horas después de las 8 a.m.($t = 0$ corresponde a las 8 a.m.), entonces

$$f(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \le t \le 3 \\ 20, & 3 < t \le 5 \\ 20 - 2(t-5), & 5 < t \le 9 \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la Fig. 2.64.

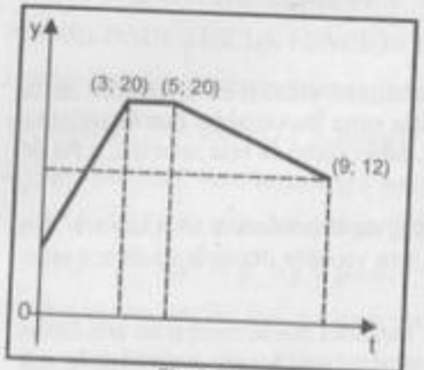


Fig. 2.64

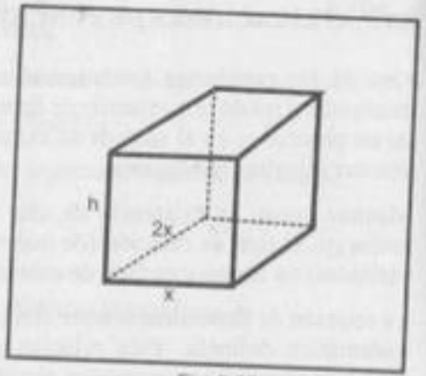


Fig. 2.65

EJEMPLO 24. Si $20\ m^3$ es el volumen de una caja cerrada de base rectangular, cuyo largo es el doble del ancho, exprese el área total de la caja en términos del ancho de la base.

Solución

Si x es el ancho de la base (Fig. 2.65), entonces $20 = x(2x)h \Leftrightarrow h = \dfrac{10}{x^2}$

Luego, el área total es

$$A(x) = 4x^2 + \frac{40}{x} + \frac{20}{x} = \frac{4x^3 + 60}{x},\ x > 0.$$

EJEMPLO 25. Una librería puede adquirir cierto libro a un costo de S/.20 por unidad. El librero calcula que puede vender 700 ejemplares mensuales al precio de S/.40 cada uno y que estará en capacidad de vender 45 ejemplares más por la reducción de S/.2 en el precio de venta. Exprese la utilidad mensual de la librería como función del precio de venta.

Solución

Si n es el número de rebajas de S/.2 y x es el precio de venta, entonces

$$x = 40 - 2n \Leftrightarrow n = \frac{40 - x}{2}$$

El número N de ejemplares vendidos es:

$$N = 700 + 45\left(\frac{40 - x}{2}\right),\ \text{de donde } N = \frac{3200 - 45x}{2}$$

Considerando que $Utilidad = Ingreso - Costo$, se tiene

$$U(x) = \frac{1}{2}(3200 - 45x)x - \frac{1}{2}(3200 - 45x)20$$

$$U(x) = \frac{1}{2}(3200 - 45x)(x - 20),\ 0 \le x \le 20$$

www.FreeLibros.com

2.13.1 FUNCIONES COSTO, INGRESO Y UTILIDAD

El **costo total** de producción de un producto P está en función de la cantidad x producida por la empresa. Si el costo total se denota por C_t, entonces $C_t = f(x)$.

En la producción del producto P, existen ciertos costos que son independientes del volumen de producción, por ejemplo, parte de los salarios, seguros, alquiler, etc. El total de estos costos es llamado **costo fijo**, y se denota con C_f (constante). Luego, el costo total se puede escribir como la suma de dos funciones:

$$C_t = C_f + C_v$$

donde C_v es el **costo variable** y depende sólo de x. En este caso, es natural que el objetivo sea minimizar C_t.

Otra función de interés es el **costo medio**, que es el costo promedio por unidad del producto. Si C_m representa el costo medio, entonces

$$C_m = \frac{C_t}{x}$$

donde x representa la cantidad de artículos producidos.

También estudiaremos la función ingreso total (I_t). Esta función está dada por

$$I_t = xp$$

donde x es la cantidad de artículos vendidos y p es el precio unitario.

Si se consideran las funciones de ingreso total y costo total (I_t y C_t), entonces la función **utilidad (lucro o ganancia)** se define por

$$U = I_t - C_t$$

El punto donde el ingreso total es igual al costo total se denomina **punto crítico**. Para el hombre de empresa es importante conocer la ubicación de este punto, pues su abscisa representa la cantidad del producto donde $I_t = C_t$. Esto implica que la utilidad en este caso es nula.

EJEMPLO 26. Supongamos que el costo fijo de una empresa es S/. 1500, el costo de producción de cada artículo es S/. 50 y el precio de venta por artículo es S/. 200. En este caso, si x representa la cantidad de artículos, se tiene:

Costo total:	$C_t = 50x + 1500$	(Fig. 2.66)
Costo Fijo:	$C_f = 1500$	(Fig. 2.66)
Costo variable:	$C_v = 50x$	(Fig. 2.66)
Costo medio:	$C_m = \dfrac{C_t}{x} = 50 + \dfrac{1500}{x}$	(Fig. 2.67)
Ingreso total:	$I_t = 200x$	(Fig. 2.66)

Para obtener las coordenadas del punto crítico E, hacemos $I_t = C_t$, es decir,

$$200x = 50x + 1500 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow E(10; 2000)$$

Esto significa:

Si $x = 10$, entonces $I_t = C_t$ y la utilidad es nula (U=0)

Si $x > 10$, entonces $I_t > C_t$ y la utilidad es $U = I_t - C_t = 150x - 1500$

Si $x < 10$, entonces $I_t < C_t$. En este caso, existe pérdida y está dada por $-U = 1500 - 150x$.

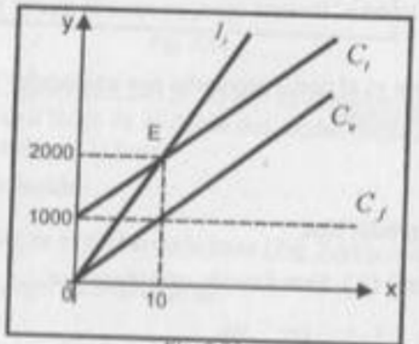


Fig. 2.66

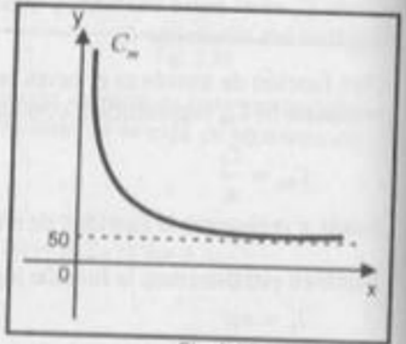


Fig. 2.67

2.13.2 FUNCIÓN OFERTA Y FUNCIÓN DEMANDA

La cantidad demandada de un producto P en el mercado depende de varias variables, por ejemplo, del precio del producto, del precio de los productos sustitutos, del ingreso del consumidor, de los gustos, etc. Esto se puede escribir como:

$$q = D(p,\ i,\ p',\ p'', \ldots,\ g, \ldots)$$

donde q = cantidad demandada, p = precio del producto P, i = ingreso del consumidor, $p', p'', \ldots$ = precio de sustitutos, g = gustos, etc.

Suponiendo que todas las variables son constantes, excepto el precio de P, podemos escribir

$$q = D(p)$$

D es llamada **función demanda.**

La propiedad fundamental de la función demanda es

"A mayor precio, menor cantidad demandada y a menor precio, mayor cantidad demandada".

Esta propiedad, conocida como **ley de demanda,** explica el comportamiento del comprador en el mercado. Por tanto, la función demanda D es decreciente (Fig. 2.68).

www.FreeLibros.com

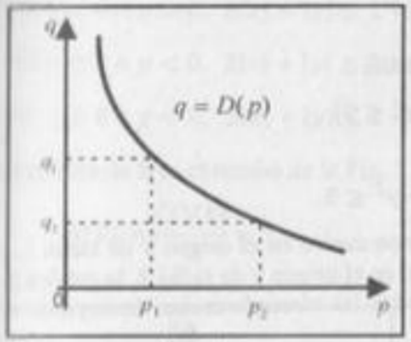


Fig. 2.68

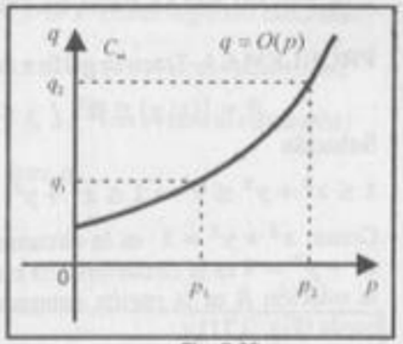


Fig. 2.69

Análogamente, se considera la **función oferta**, definida por

$$q = O(p)$$

donde q es la cantidad del producto P que oferta el productor y p el precio unitario de P. En este caso, al igual que en el caso de la demanda, se considera que la cantidad ofertada sólo depende del precio del producto, y se mantienen constantes las otras variables que intervienen.

La propiedad de la función de oferta, conocida como **ley de oferta** es
"A mayor precio, mayor cantidad ofertada y a menor precio, menor cantidad ofertada".

Esta ley explica el comportamiento del vendedor en el mercado. De acuerdo con esta ley, la función de oferta O es creciente (Fig. 2.69).

Para un determinado producto P, se dice que hay **equilibrio** en el mercado cuando la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada. El punto de intersección de las curvas de demanda (gráfico de $q = D(p)$) y de oferta (gráfico de $q = O(p)$) recibe el nombre de **punto de equilibrio**.

EJEMPLO 27. Supongamos que las funciones de demanda (D) y de oferta (O) están dadas por

$$D = 500 - 10p \quad \text{y} \quad O = 98 + 2p$$

Al igualar $D = O$, se obtiene el **precio de equilibrio** $p_e = 33{,}5$. Luego, la **cantidad de equilibrio** es $q_e = 165$ unidades y el punto de equilibrio es $E(33{,}5; 165)$.

La gráfica correspondiente se muestra en la Fig. 2.70.

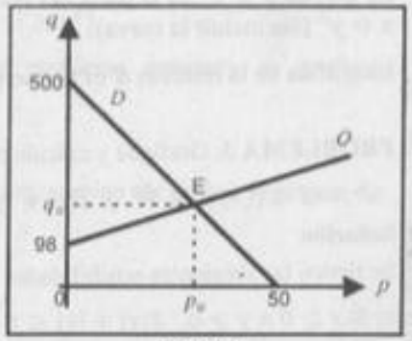


Fig. 2.70

2.14 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Trace la gráfica de la relación

$$R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Solución

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 9.$

Como $x^2 + y^2 = 1$ es la circunferencia con centro en el origen y de radio 1, y $x^2 + y^2 = 9$ es la circunferencia con centro en el origen y de radio 3, la gráfica de la relación R es la región comprendida entre las circunferencias, incluyendo el borde (Fig. 2.71).

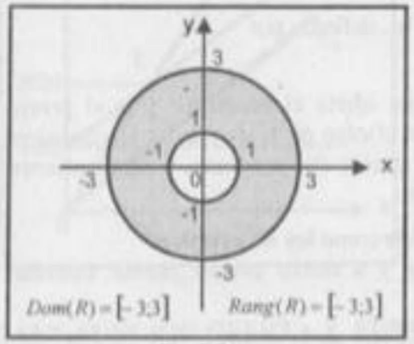


Fig. 2.71

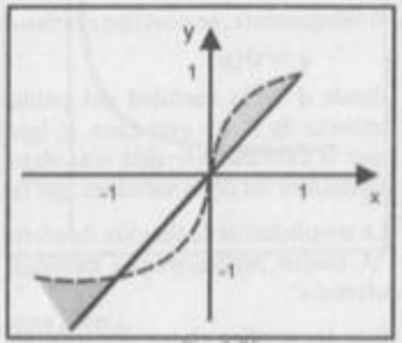


Fig. 2.72

PROBLEMA 2. Trace la gráfica de la relación

$$R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq y \wedge x > y^3\}$$

Solución

La gráfica de $x \leq y$ es la parte del plano que se encuentra a la izquierda de la recta $y = x$ (incluida la recta).

La gráfica $x > y^3$ es la parte del plano que se encuentra a la derecha de la curva $x = y^3$ (sin incluir la curva).

La gráfica de la relación R es la intersección de ambas regiones (Fig. 2.72).

PROBLEMA 3. Grafique y calcule el área de la región S, donde

$$S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2|x| + |y| \leq 1\}.$$

Solución

Se tienen las siguientes posibilidades

a) Si $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, $2|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow 2x + y \leq 1$ (en el primer cuadrante)

b) Si $x < 0 \wedge y > 0$, $2|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -2x + y \leq 1$ (en el segundo cuadrante)

c) Si $x < 0 \wedge y < 0$, $2|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -2x - y \leq 1$ (en el tercer cuadrante)

d) Si $x > 0 \wedge y < 0$, $2|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow 2x - y \leq 1$ (en el cuarto cuadrante)

La gráfica de S es el rombo de la Fig. 2.73 y su área es

$$A(S) = \frac{(2)(1)}{2} = 1.$$

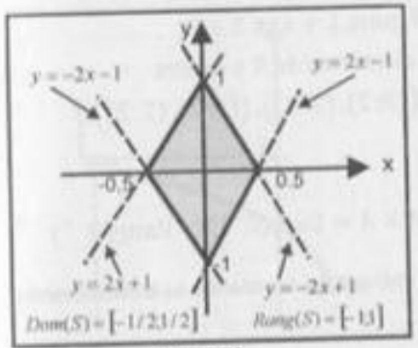


Fig. 2.73

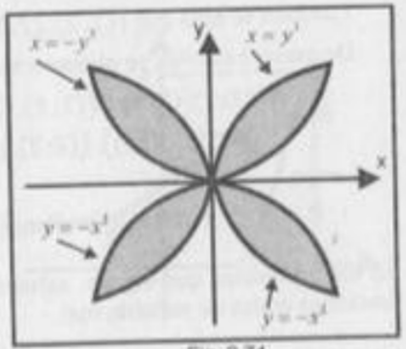


Fig. 2.74

PROBLEMA 4. Si T es la relación definida por

$$T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| \geq |x^3| \ \wedge \ |x| \geq y^2\}$$

Bosqueje la gráfica de su relación inversa.

Solución

La relación inversa de T es

$$T^{-1} = \{(y;x) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| \geq |x^3| \ \wedge \ |x| \geq y^2\}$$

Ahora, intercambiando las letras x e y en T^{-1}, obtenemos

$$T^{-1} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \geq |y^3| \ \wedge \ |y| \geq x^2\}$$

Trabajando con posibilidades (como en el problema anterior), se grafican inicialmente las regiones determinadas por

$$|x| \geq |y^3| \ , \ |y| \geq x^2$$

La gráfica de la relación inversa T^{-1} es la intersección de ambas regiones. Se muestra en la Fig. 2.74.

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 5. Dado el conjunto $A = \{1, 2\}$, se define la relación R en $A \times A$ de la siguiente manera:

$$(a; b)R(c; d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Determine R y R^{-1}.

Solución

a) Se tiene $A \times A = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2)\}$

$(1;1)\ R\ (1;1)$, pues $1 + 1 = 1 + 1$. Luego, $((1;1),(1;1)) \in R$

$(1;1)\ R\ (2;2)$, pues $1 + 2 = 1 + 2$. Luego, $((1;1),(2;2)) \in R$

También se nota que $((1;2),(2;1)) \notin R$, pues $1 + 1 \neq 2 + 2$.

De manera similar, se obtienen los otros elementos de R y resulta

$$R = \left\{ \begin{matrix} ((1;1),(1;1)), ((1;1),(2;2)), ((2;2),(2;2)), ((1;2),(1;2)), \\ ((2;1),(2;1)), ((2;2),(1;1)) \end{matrix} \right\}$$

Luego,

$$R = R^{-1} \text{ y } \mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Rang}(R) = A \times A = \mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Rang}(R^{-1})$$

En los problemas que siguen, salvo que se indique lo contrario, se considerarán funciones reales de variable real.

PROBLEMA 6. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \sqrt{4 - |x + 3|} \quad , x \in [-3; 1) \ , \quad g(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \leq -1 \\ x + 2 \ , & -1 < x \leq 1 \\ 4x - 4 \ , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Determine sus rangos y esboce sus gráficas.

Solución

a) El dominio de f es $D_f = [-3; 1)$

Para determinar el rango de f, debemos tener en cuenta la variación de x. Procedemos de la siguiente manera:

$$x \in [-3; 1) \Leftrightarrow -3 \leq x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x + 3 < 4$$

De ello se deduce

$$|x + 3| = x + 3 \quad \text{y} \quad \sqrt{4 - |x + 3|} = \sqrt{4 - (x + 3)} = \sqrt{1 - x}$$

Por tanto,

$$x \in [-3; 1) \Leftrightarrow -3 \leq x < 1 \Leftrightarrow 3 \geq -x > -1 \Leftrightarrow 4 \geq 1 - x > 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{1 - x} > 0$$

Esto es, $f(x) = \sqrt{4 - |x + 3|} = \sqrt{1 - x} \in \langle 0; 2]$

Luego, el rango de f es $R_f = \langle 0; 2]$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.75.

b) El dominio de g es $D_g = \langle -\infty; 2]$. Como g es una función definida por partes (**seccionalmente definida**), determinamos el rango de cada sección. Así,

Si $x \leq -1 \Rightarrow g(x) = 1$ y $g(x) \in \{1\}$

Si $-1 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) = (x + 2) \in \langle 1; 3]$

Si $1 < x \leq 2 \Rightarrow g(x) = (4x - 4) \in \langle 0; 4]$

En consecuencia, el rango de g es $R_g = \{1\} \cup \langle 1; 3] \cup \langle 0; 4] = \langle 0; 4]$.

La gráfica de g se muestra en la Fig. 2.76.

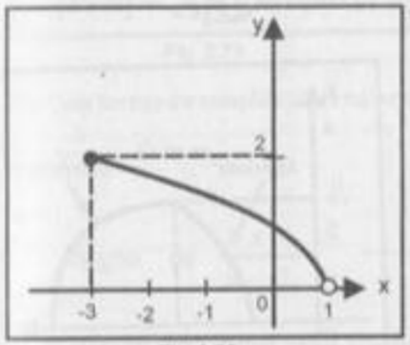


Fig. 2.75

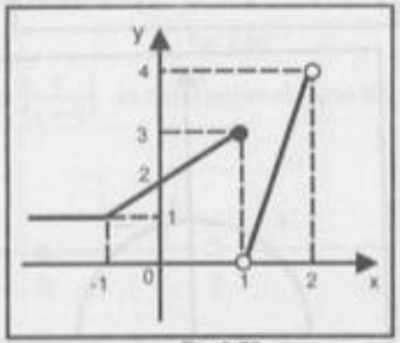


Fig. 2.76

PROBLEMA 7. Determine los dominios, los rangos y trace las gráficas de las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad , \quad g(x) = \sqrt{3x - |x^2 - 4|}$$

Solución

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 9 - x^2 \geq 0\} = [-3; 3]$ y $R_f = [0; 3]$

Haciendo $f(x) = y$, se deduce que la gráfica de f es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$ (Fig. 2.77).

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3x - |x^2 - 4| \geq 0\} = [1; 4]$ (I)

Teniendo en cuenta que:

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2; 2\rangle$. En este caso, $|x^2 - 4| = 4 - x^2$ (II)

$x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$. En este caso, $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ (III)

De (I), (II) y (III) se tiene:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x - 4} \ , & \text{si } x \in [1; 2\rangle \\ \sqrt{4 + 3x - x^2} \ , & \text{si } x \in [2; 4] \end{cases}$$

www.FreeLibros.com

La gráfica de la primera regla de correspondencia de g es parte de la hipérbola

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{25}{4}\ ,\ y \geq 0$$

y la gráfica de la segunda regla de correspondencia es parte de la semicircunferencia

$$(x-\frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}\ ,\ y \geq 0$$

La gráfica de g se muestra en la Fig. 2.78. El rango de g es $R_g = [0;\sqrt{6}]$.

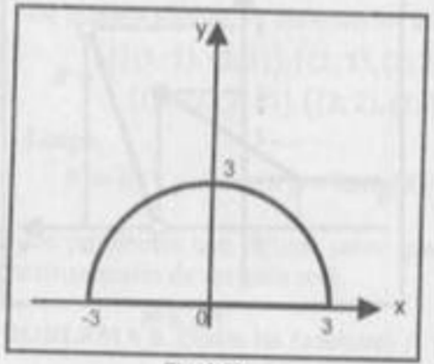


Fig. 2.77

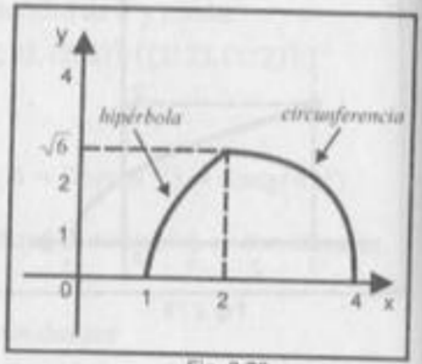


Fig. 2.78

PROBLEMA 8. Halle el dominio y el rango de las siguientes funciones. Además, esboce sus gráficas.

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x-3}\ ,\quad g(x) = \left|\frac{x}{x-2}\right|$$

Solución

a) Factorizando el numerador de la función racional f, tenemos

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)^2}{x-3}\ ,\ D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

Luego, para $x \neq 3$, se tiene

$$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$$

La gráfica de f es la parábola $y + 4 = (x-1)^2$ a la cual se le ha quitado el punto $(3;0)$ (Fig. 2.79).

El rango de f es $[-4;+\infty)$.

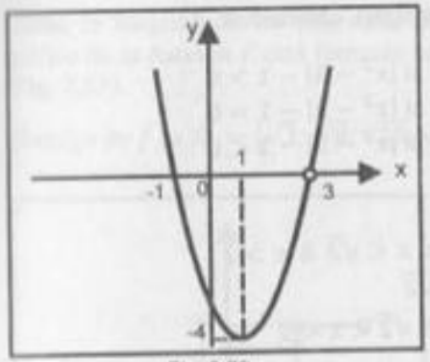


Fig. 2.79

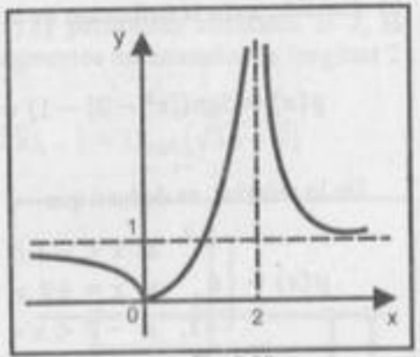


Fig. 2.80

b) Una forma de simplificar el valor absoluto $\left|\frac{x}{x-2}\right|$ es determinar el signo de $\frac{x}{x-2}$. Esto es,

Signo de $\frac{x}{x-2}$

Considerando que el valor absoluto de un número negativo es su opuesto y el valor absoluto de un número no negativo es el mismo, se tiene

$$g(x) = \left|\frac{x}{x-2}\right| = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } x > 2 \\ \frac{x}{2-x}, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

El dominio de g es $\mathbb{R} - \{2\}$, el rango es $[0;+\infty)$ y la gráfica de g se muestra en la Fig. 2.80.

PROBLEMA 9. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} [\![x-1]\!], & \text{si } 4 \leq x < 7 \\ \sqrt{|x|}, & \text{si } x < 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \mathrm{Sgn}(|x^2 - 3| - 1)$$

Trace las gráficas de f y de g.

Solución

a) Considerando las propiedades del máximo entero y del valor absoluto, se tiene

$$f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] - 1, & 4 \leq x < 7 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

De su gráfica (Fig. 2.81) se deduce que $R_f = [0;+\infty)$.

www.FreeLibros.com

b) Considerando la definición de la función signo, obtenemos

$$g(x) = \text{Sgn}(|x^2-3|-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x^2-3|-1>0 \\ 0, & \text{si } |x^2-3|-1=0 \\ -1, & \text{si } |x^2-3|-1<0 \end{cases}$$

De lo anterior, se deduce que

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x<-2 \text{ ó } -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \text{ ó } x>2 \\ 0, & \text{si } x=\pm 2 \text{ y } x=\pm\sqrt{2} \\ -1, & \text{si } -2<x<-\sqrt{2} \text{ ó } \sqrt{2}<x<2 \end{cases}$$

En la gráfica de g (Fig. 2.82), se observa que $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = \{-1; 0; 1\}$.

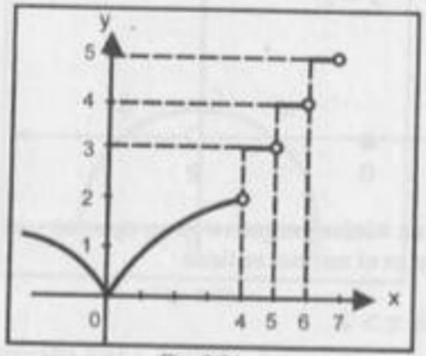


Fig. 2.81

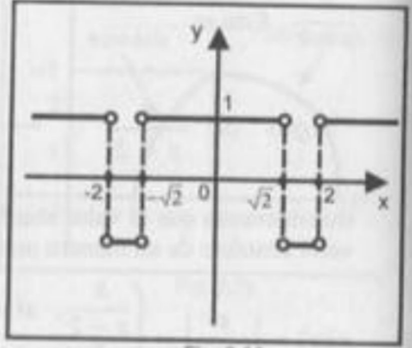


Fig. 2.82

PROBLEMA 10. Trace la gráfica de $f(x)$ e indique su dominio y rango.

$$f(x) = \sqrt{3\left[\!\left[\frac{x+6}{2}\right]\!\right] + 2\left[\!\left[\frac{x-4}{2}\right]\!\right] + 8}$$

Solución

Por la propiedad del máximo entero, se tiene

$$\left[\!\left[\frac{x+6}{2}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{x}{2}+3\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]+3 \quad \text{y} \quad \left[\!\left[\frac{x-4}{2}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-2$$

Así, $f(x) = \sqrt{5[\![x/2]\!]+13}$ y su dominio es $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 5[\![x/2]\!]+13 \geq 0\}$.

$$5[\![x/2]\!]+13 \geq 0 \Leftrightarrow [\![x/2]\!] \geq -\frac{13}{5} \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] \geq -2 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$$

Luego, $D_f = [-4; +\infty)$.

Como la longitud de los intervalos donde $[\![x/2]\!]$ permanece constante es 2, la gráfica de la función f está formada por los segmentos horizontales de longitud 2 (Fig. 2.83).

El rango de f es $R_f = \{\sqrt{3}; \sqrt{8}; \sqrt{13}; \sqrt{18}; \sqrt{23}; \ldots\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\sqrt{5n-2}\}$

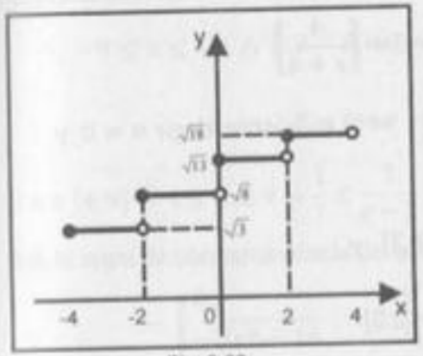


Fig. 2.83

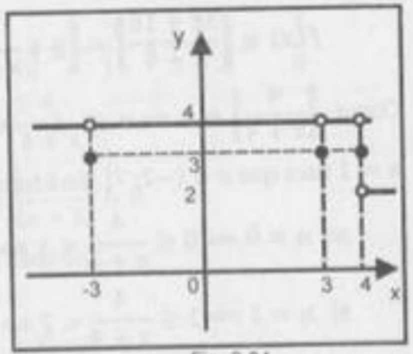


Fig. 2.84

PROBLEMA 11. Trace la gráfica de la función f e indique su dominio y rango.

$$f(x) = 3 - \text{Sgn}(x^3 - 9x - 4|x^2-9|)$$

Solución

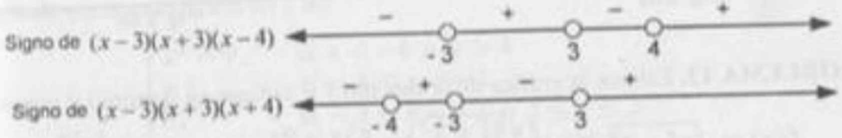
$D_f = \mathbb{R}$

Como $|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9, & \text{si } x \geq 3 \text{ ó } x \leq -3 \\ -(x^2-9), & \text{si } -3<x<3 \end{cases}$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} 3-\text{Sgn}[x(x^2-9)-4(x^2-9)], & \text{si } x\leq -3 \text{ ó } x \geq 3 \\ 3-\text{Sgn}[x(x^2-9)+4(x^2-9)], & \text{si } -3<x<3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3-\text{Sgn}[(x-3)(x+3)(x-4)], & \text{si } x\leq -3 \text{ ó } x \geq 3 \\ 3-\text{Sgn}[(x-3)(x+3)(x+4)], & \text{si } -3<x<3 \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene



Luego, aplicando la definición de la función signo, obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in \langle -\infty; 4\rangle \text{ y } x \neq \pm 3 \\ 3, & \text{si } x = \pm 3 \text{ ó } x = 4 \\ 2, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

El rango de f es $R_f = \{2,3,4\}$ y la gráfica de f se muestra en la Fig. 2.84.

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 12. Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \left[\!\left[\frac{3x+16}{x+4}\right]\!\right], \text{ si } x \in \langle -2; 7].$$

Solución

Dividiendo la fracción que está dentro del símbolo del máximo entero, obtenemos

$$f(x) = \left[\!\left[\frac{3x+16}{x+4}\right]\!\right] = \left[\!\left[3 + \frac{4}{x+4}\right]\!\right] = 3 + \left[\!\left[\frac{4}{x+4}\right]\!\right]$$

Como $\left[\!\left[\frac{4}{x+4}\right]\!\right] = n \Leftrightarrow n \leq \frac{4}{x+4} < n+1$, será suficiente elegir $n = 0$ y $n = 1$ para que $x \in \langle -2; 7]$. En efecto,

$$\text{si } n = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{x+4} < 1 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 7] \text{ y}$$

$$\text{si } n = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{4}{x+4} < 2 \Leftrightarrow x \in \langle -2; 0]$$

Luego, $f(x) = \left[\!\left[\frac{3x+16}{x+4}\right]\!\right] = 3 + \left[\!\left[\frac{4}{x+4}\right]\!\right] = \begin{cases} 4, & x \in \langle -2; 0] \\ 3, & x \in \langle 0; 7] \end{cases}$.

Por tanto, el rango de f es $R_f = \{3, 4\}$. Su gráfica se muestra en la Fig. 2.85.

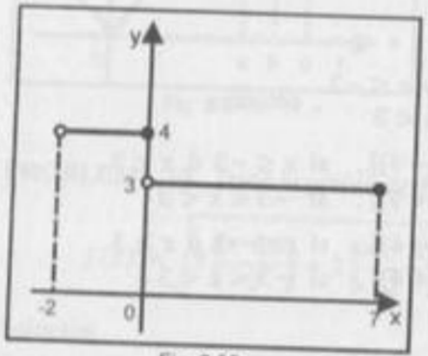


Fig. 2.85

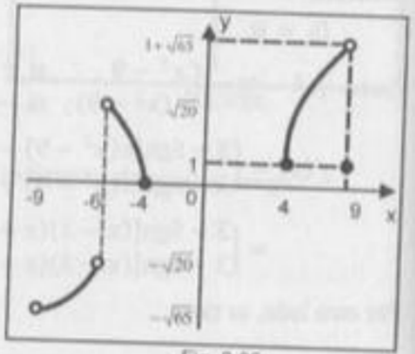


Fig. 2.86

PROBLEMA 13. Esboce la gráfica de la función f e indique su dominio y rango.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}\ \text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{81 - x^2}}{x+6}\right) + \left[\!\left[\frac{5x-9}{x-2}\right]\!\right] - 4$$

Solución

El dominio es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 16 \geq 0 \wedge 81 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq -6 \wedge x \neq 2\}$$
$$= [-9; -4] \cup [4; 9] - \{-6\}$$

Por otro lado,

$$\text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{81-x^2}}{x+6}\right) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in \langle -9; -6\rangle \\ 0, & \text{si } x = \pm 9 \\ 1, & \text{si } x \in \langle -6; 9\rangle \end{cases} \quad \text{y} \quad \left[\!\left[\frac{5x-9}{x-2}\right]\!\right] = 5 + \left[\!\left[\frac{1}{x-2}\right]\!\right]$$

Si $x \in [-9; -4] \wedge x \neq -6$, tenemos

$$-9 \leq x \leq -4 \wedge x \neq -6 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{1}{11} \wedge \frac{1}{x-2} \neq -\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow \left[\!\left[\frac{1}{x-2}\right]\!\right] = -1$$

$$\text{Si } x \in [4; 9] \Rightarrow 4 \leq x \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\!\left[\frac{1}{x-2}\right]\!\right] = 0$$

Así, la regla de correspondencia de la función dada es

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = -9 \\ -\sqrt{x^2-16}, & \text{si } -9 < x < -6 \\ \sqrt{x^2-16}, & \text{si } -6 < x \leq -4 \\ \sqrt{x^2-16} + 1, & \text{si } 4 \leq x < 9 \\ 1, & \text{si } x = 9 \end{cases}$$

La gráfica está formada por las partes de las hipérbolas $x^2 - y^2 = 16$ y $x^2 - (y-1)^2 = 16$ (Fig. 2.86). Además, $R_f = \langle -\sqrt{65}; -\sqrt{20}\rangle \cup [0; 1 + \sqrt{65}\rangle$.

PROBLEMA 14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 9|, & \text{si } |x| > 4 \\ \text{Sgn}\,([\![x+1]\!] + 2), & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{\text{Sgn}(x-2) + |[\![x-2]\!]|}, & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Trace la gráfica de f y determine su imagen.

Solución

Teniendo en cuenta las definiciones de valor absoluto, signo y máximo entero, la regla de correspondencia de f es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x < -4 \text{ ó } x > 4 \\ -1, & \text{si } -4 \leq x < -3 \\ 0, & \text{si } -3 \leq x < -2 \text{ ó } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{si } -2 \leq x < 1 \text{ ó } 2 < x < 3 \\ \sqrt{2}, & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \sqrt{3}, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $\text{Img} f = \langle 7; +\infty\rangle \cup \{-1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.87.

www.FreeLibros.com

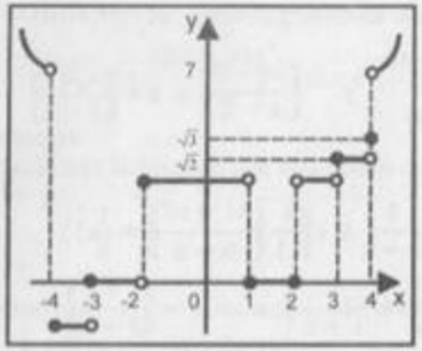


Fig. 2.87

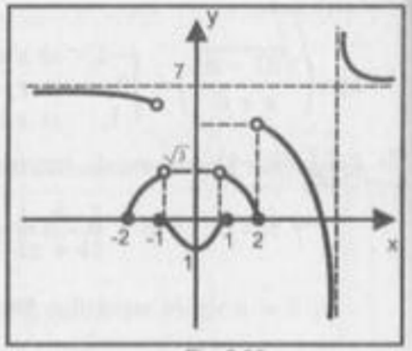


Fig. 2.88

PROBLEMA 15. Dada la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}7+\dfrac{2}{x-6}, & \text{si } |x|>2 \wedge x\neq 6\\ \sqrt{4\text{Sgn}(x^2-1)-x^2}, & \text{si } 1<|x|\leq 2\\ \left[\!\left[\dfrac{1}{x-2}\right]\!\right]+x^2, & \text{si } |x|\leq 1\end{cases}$$

Trace la gráfica de f y determine su rango.

Solución

La regla de correspondencia de la función es equivalente a :

$$f(x)=\begin{cases}7+\dfrac{2}{x-6}, & \text{si } (x<-2 \text{ ó } x>2)\wedge x\neq 6\\ \sqrt{4-x^2}, & \text{si } x\in[-2,-1)\cup(1;2]\\ x^2-1, & \text{si } x\in[-1;1]\end{cases}$$

Observando la gráfica de f (Fig. 2.88), se sigue que

$$R_f=\langle-\infty;\frac{13}{2}\rangle\cup\langle\frac{27}{4};+\infty\rangle-\{7\}.$$

PROBLEMA 16. Halle el dominio, rango y esboce la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x-3|+|x+5|}{1+\text{Sgn}(x^2-4)+|x+3|}$$

Solución

Considerando las definiciones de signo y valor absoluto, podemos expresar la regla de correspondencia de f en la siguiente forma

$$f(x)=\begin{cases}2, & \text{si } x<-5\\ -\dfrac{8}{x+1}, & \text{si } -5\leq x<-3\\ \dfrac{8}{x+5}, & \text{si } x\in[-3;-2)\cup(2;3)\\ 4, & \text{si } x=-2\\ \dfrac{8}{x+3}, & \text{si } -2<x<2\\ \dfrac{4}{3}, & \text{si } x=2\\ \dfrac{2(x+1)}{x+5}, & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

De la gráfica de f (Fig. 2.89) se deduce que $R_f=\langle 1;8\rangle-\left(\langle\frac{8}{7};\frac{4}{3}]\cup\langle\frac{4}{3};\frac{8}{5}]\right)$.

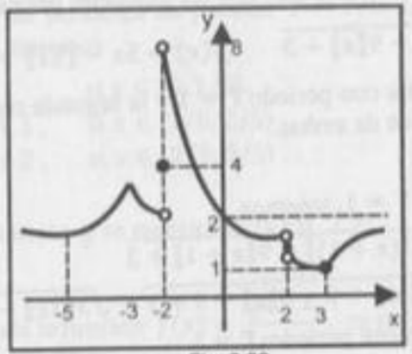


Fig. 2.89

PROBLEMA 17. Halle el dominio de la función definida por

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{|[\![3]\!]+5|-4}}{x[\![x/5]\!]+7x}$$

Solución

En primer lugar, debe cumplirse

$$|[\![3x]\!]+5|-4\geq 0 \Leftrightarrow |[\![3x]\!]+5|\geq 4 \Leftrightarrow [\![3x]\!]\geq -1 \text{ ó } [\![3x]\!]\leq -9$$

$$\Leftrightarrow 3x\geq -1 \text{ o } 3x<-8 \Leftrightarrow x\in\langle-\infty;-8/3)\cup[-1/3;+\infty)$$

www.FreeLibros.com

Por otro lado, también debe verificarse que $x\llbracket x/5\rrbracket + 7x \neq 0$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x\llbracket x/5\rrbracket + 7x = 0\}$, entonces

$$x\llbracket x/5\rrbracket + 7x = 0 \Leftrightarrow x(\llbracket x/5\rrbracket + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } \llbracket x/5\rrbracket = -7$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } -7 \leq \frac{x}{5} < -6 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó} -35 \leq x < -30$$

Luego, $A = \{0\} \cup [-35; 30\rangle$.

Por lo tanto, el dominio de la función f es la intersección del conjunto $\langle -\infty; -8/3\rangle \cup [-1/3; +\infty\rangle$ con el complemento del conjunto A. Esto es,

$$D_f = \left(\langle -\infty; -8/3\rangle \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right\rangle\right) \cap A'$$

$$= \langle -\infty; -35\rangle \cup [-30; -8/3\rangle \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right\rangle - \{0\}.$$

PROBLEMA 18. Demuestre que las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{3\llbracket 3x\rrbracket - 9\llbracket x\rrbracket + 3} \qquad g(x) = 5x - \llbracket 5x\rrbracket$$

son periódicas; la primera con período $T = 1$ y la segunda con período $T = 1/5$. Además, esboce la gráfica de ambas.

Solución

a) En la función f, para $T = 1$, tenemos

$$f(x+1) = \sqrt{3\llbracket 3(x+1)\rrbracket - 9\llbracket x+1\rrbracket + 3}$$

$$= \sqrt{3\llbracket 3x\rrbracket + 9 - 9\llbracket x\rrbracket - 9 + 3} = \sqrt{3\llbracket 3x\rrbracket - 9\llbracket x\rrbracket + 3} = f(x)$$

Luego, f es periódica con período $T = 1$

Para esbozar la gráfica, determinamos el dominio de f. Esto es,

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 3\llbracket 3x\rrbracket - 9\llbracket x\rrbracket + 3 \geq 0\} = \mathbb{R}$, pues

$3\llbracket 3x\rrbracket - 9\llbracket x\rrbracket + 3 = 3(\llbracket 3x\rrbracket - 3\llbracket x\rrbracket) + 3 \geq 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Si $\llbracket x\rrbracket = n,\ n \in \mathbb{Z}$, entonces $n \leq x < n+1 \Leftrightarrow 3n \leq 3x < 3n+3$

Luego, $\llbracket 3x\rrbracket = 3n$ ó $\llbracket 3x\rrbracket = 3n+1$ ó $\llbracket 3x\rrbracket = 3n+2$

Por tanto, para $n \leq x < n+1$, se tiene

$\llbracket 3x\rrbracket - 3\llbracket x\rrbracket = (3n - 3n = 0$ ó $(3n+1) - 3n = 1 \vee (3n+2) - 3n = 2]$

Más aún, podemos expresar

$$\llbracket 3x\rrbracket - 3\llbracket x\rrbracket = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [n; n+1/3\rangle \\ 1, & \text{si } x \in \left[n + \frac{1}{3}; n+2/3\right\rangle \\ 2, & \text{si } x \in [n+2/3; n+1\rangle \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.90.

www.FreeLibros.com

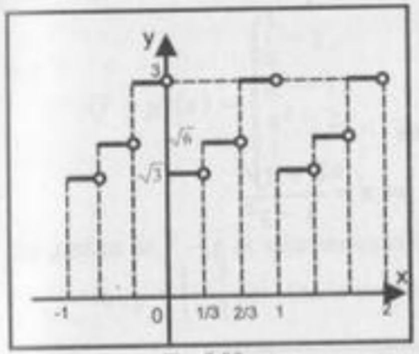


Fig. 2.90

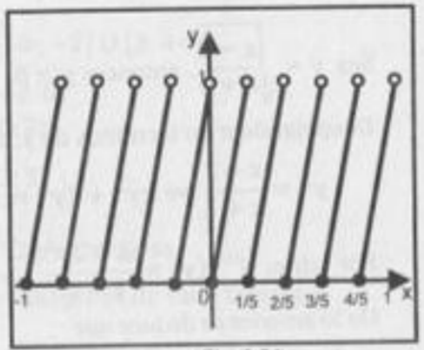


Fig. 2.91

b) Para la función g tenemos

$$g\left(x + \frac{1}{5}\right) = 5\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left\llbracket 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\right\rrbracket = 5x - \llbracket 5x\rrbracket = f(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Así, la función g es periódica de período $T = 1/5$. Usando la longitud del período $T = 1/5$, tenemos

$$g(x) = \begin{cases} 5x\ , & \text{si } x \in [0; 1/5\rangle \\ 5x+1\ , & \text{si } x \in [1/5; 2/5\rangle \\ 5x+2\ , & \text{si } x \in [2/5; 3/5\rangle \\ \ldots \end{cases}$$

La gráfica de la función g se muestra en la Fig. 2.91.

PROBLEMA 19. Dada la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$, se pide

a) Determinar D_f b) Demostrar que f es inyectiva c) Determinar Img f

Solución

a) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0\right\} = \langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

b) Sean a y b dos elementos del dominio de f tales que $f(a) = f(b)$, esto es,

$$\sqrt{\frac{a-2}{a+2}} = \sqrt{\frac{b-2}{b+2}} \Leftrightarrow \frac{a-2}{a+2} = \frac{b-2}{b+2}$$

$$\Leftrightarrow ab - 2b + 2a - 4 = ab - 2a + 2b - 4$$

De lo anterior se obtiene que $a = b$. Luego, f es inyectiva.

c) Como f es inyectiva, hallamos la función inversa f^{-1} y luego se verificará:

$\text{Img} f = D_{f^{-1}}$

Sea $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$, entonces $y \geq 0$.

Despejando x en términos de y, se tiene

$$y^2 = \frac{x-2}{x+2} \Leftrightarrow xy^2 + 2y^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2+2y^2}{1-y^2}$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = \dfrac{2+2y^2}{1-y^2}$, $y \geq 0$

De lo anterior se deduce que

$$\operatorname{Img} f = D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R}_0^+ \;/\; y \neq 1\} = [0; +\infty) - \{1\}.$$

PROBLEMA 20. Sea $f: A \to [-8; 1) \;/\; f(x) = \dfrac{3+2x}{2-x}$

a) Determine $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) \in [-8; 1)\}$.

b) ¿f es suryectiva?

Solución

a) Como $f(x) \in [-8; 1)$, entonces

$$-8 \leq \frac{3+2x}{2-x} < 1 \Leftrightarrow -8 \leq \frac{3+2x}{2-x} \wedge \frac{3+2x}{2-x} < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1/3) \cup \left[\frac{19}{6}; +\infty\right)$$

Luego, $A = (-\infty; -1/3) \cup \left[\dfrac{19}{6}; +\infty\right)$.

b) Por definición f es suryectiva si $\forall\, y \in [-8; 1),\ \exists\, x \in A \;/\; f(x) = y$

Si $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{3+2x}{2-x} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{2y-3}{y+2}$

La última igualdad no tiene sentido para $y = -2 \wedge -2 \in [-8; 1)$, es decir, no existe $x \in A$ tal que $f(x) = -2$. Por tanto, f no es suryectiva.

PROBLEMA 21. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } |x| < 2 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1, & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } x \geq 3 \end{cases}$$

Trace la gráfica de $f - g$ e indique su rango.

Solución

Como f y g están definidas seccionalmente, entonces $f - g$ también lo estará. El dominio de cada sección será la intersección de los dominios correspondientes. Luego, trabajando con cada una de las posibilidades, obtenemos

www.FreeLibros.com

$$(f-g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1, & x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \\ x^2 - 1, & x \in (-2; 0] \\ x^2 - 2x, & x \in (0; 2) \\ \dfrac{1}{x} - 2x, & x \in [2; 3) \end{cases}$$

La gráfica de $f - g$ se muestra en la Fig. 2.92 y su rango es

$R_{f-g} = \left[-\dfrac{3}{2}; 3\right)$ (es la unión de las imágenes de cada sección).

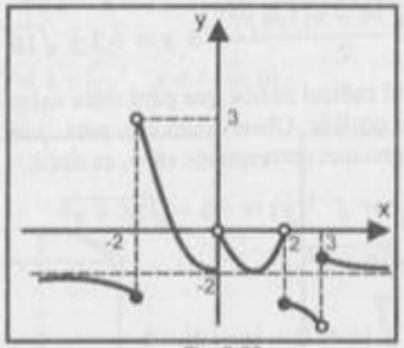


Fig. 2.92

PROBLEMA 22. Demuestre que la función definida por

$$f(x) = -\sqrt{x^2 + 6x - 7}, \quad x \in (-\infty; -7]$$

tiene función inversa y halle $f^{-1}(x)$.

Solución

En primer lugar, se demostrará que f es inyectiva.

Sean $a, b \in (-\infty; -7]$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces,

$$-\sqrt{a^2 + 6a - 7} = \sqrt{b^2 + 6b - 7} \Leftrightarrow a^2 + 6a - 7 = b^2 + 6b - 7$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 6(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ ó } b = -6 - a$$

La posibilidad $b = -6 - a$ no se cumple, pues

$$a \in (-\infty; -7] \Leftrightarrow a \leq -7 \Leftrightarrow b = -6 - a \geq 1 \Rightarrow b \notin (-\infty; -7]$$

Ello contradice el hecho de que tanto a como b son elementos de $\langle -\infty; -7]$. Luego, necesariamente debe cumplirse que $a = b$, y esto implica que f es inyectiva y, por tanto, tiene función inversa.

Como el rango de f es $\langle -\infty; 0]$ y $f: \langle -\infty; -7] \to \langle -\infty; 0]$, entonces

$$f^{-1}: \langle -\infty; 0] \to \langle -\infty; -7]$$

Para obtener la regla de correspondencia de f^{-1}, es suficiente despejar x de $y = f(x)$. En efecto,

$$y = -\sqrt{x^2 + 6x - 7} \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 6x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x - (7 + y^2) = 0$$

De lo anterior, $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 4(7 + y^2)}}{2}$ ó $x = -3 \pm \sqrt{16 + y^2}$

El doble signo que precede al radical indica que para cada valor de y existen dos valores para x, lo cual no es posible. Observando que para $y = 0$ se debe tener $x = -7$, se deduce que el signo que corresponde es $-$, es decir,

$$x = -3 - \sqrt{16 + y^2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -3 - \sqrt{16 + y^2}$$

Por tanto, $f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{16 + x^2}$.

PROBLEMA 23. Sea $f(x) = \dfrac{|x + 7| - |x - 9|}{5 - |x + 2|}$, $x \in \langle -2; 0) \cup \langle 3; 5]$.

Halle la regla de correspondencia de la función inversa f^{-1} si existe.

Solución

Para todo $x \in D_f = \langle -2; 0) \cup \langle 3; 5]$, se tiene

$$f(x) = \frac{(x + 7) - (9 - x)}{5 - (x + 2)} = \frac{2x - 2}{3 - x}$$

Se verifica fácilmente que f es inyectiva en todo su dominio. Luego, posee una función inversa f^{-1}. De la regla de correspondencia de $f(x)$, tenemos

$$y = f(x) = \frac{2x - 2}{3 - x} \Leftrightarrow x = \frac{3y + 2}{y + 2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y + 2}{y + 2}$$

Como $x \in D_f \Rightarrow x = \dfrac{3y + 2}{y + 2} \in \langle -2; 0) \cup \langle 3; 5]$

$$\Leftrightarrow -2 < \frac{3y + 2}{y + 2} < 0 \text{ ó } 3 < \frac{3y + 2}{y + 2} \le 5 \Leftrightarrow y \in \langle -\infty; -4] \cup \langle -\frac{6}{5}; -2/5)$$

Por tanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{x + 2}, \quad x \in D_{f^{-1}} = \langle -\infty; -4] \cup \langle -\frac{6}{5}; -2/5).$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 24. Si $f(x) = (|4 - x| - 3 - x)\sqrt{x - 6}$, halle $f^{-1}(x)$ si es que existe.

Solución

El dominio de f es $D_f = [6; +\infty)$ y

$$f(x) = (x - 4 - 3 - x)\sqrt{x - 6} = -7\sqrt{x - 6}, \quad x \in [6; +\infty)$$

Se verifica fácilmente que f es inyectiva y que su rango es $\langle -\infty; 0]$. Luego, existe f^{-1}. Para hallar $f^{-1}(x)$, se procede de la siguiente manera:

$$y = f(x) = -7\sqrt{x - 6} \Rightarrow x = 6 + \frac{y^2}{49} \Rightarrow f^{-1}(y) = 6 + \frac{y^2}{49}, y \in \langle -\infty; 0]$$

Por tanto, $f^{-1}(x) = 6 + \dfrac{x^2}{49}$, $x \in \langle -\infty; 0]$.

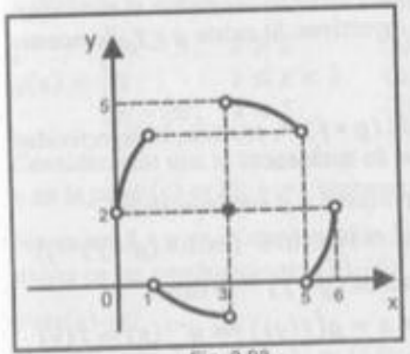


Fig. 2.93

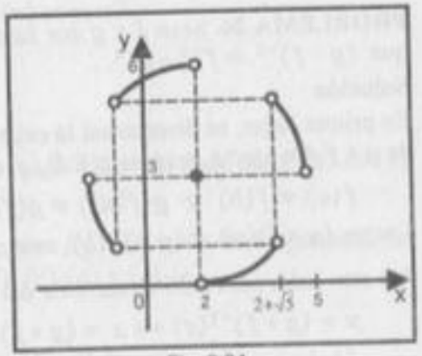


Fig. 2.94

PROBLEMA 25. Dada la función definida por

$$f(x) = 2 - \sqrt{6x - x^2} \ \text{Sgn}\left[\frac{x - 3}{(x - 6)(x - 5)(1 - x)x}\right]$$

Trace la gráfica de f y halle, si existe, su función inversa $f^{-1}(x)$.

Solución

El dominio de f es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 6x - x^2 \ge 0 \wedge (x - 6)(x - 5)(1 - x)x \ne 0\} = \langle 0; 6) - \{1, 5\}$$

La regla de correspondencia de f es

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{6x - x^2}, & 0 < x < 1 \\ 2 - \sqrt{6x - x^2}, & 1 < x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ 2 + \sqrt{6x - x^2}, & 3 < x < 5 \\ 2 - \sqrt{6x - x^2}, & 5 < x < 6 \end{cases}$$

La gráfica de f (Fig. 2.93) corresponde a las partes de la circunferencia $(x-3)^2+(y-2)^2=9$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que una función definida seccionalmente es inyectiva si cada sección es inyectiva y sus imágenes son disjuntas dos a dos. En este caso, f es inyectiva y tiene función inversa f^{-1}. Trabajando en cada una de las secciones obtenemos

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}3-\sqrt{5+4x-x^2}\,, & -1<x<2-\sqrt{5}\\ 3+\sqrt{5+4x-x^2}\,, & 2-\sqrt{5}<x<2\\ 3\,, & x=2\\ 3-\sqrt{5+4x-x^2}\,, & 2<x<2+\sqrt{5}\\ 3+\sqrt{5+4x-x^2}\,, & 2+\sqrt{5}<x<5\end{cases}$$

La gráfica de f^{-1} (Fig. 2.94) corresponde a las partes de la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=9$.

PROBLEMA 26. Sean f y g dos funciones inyectivas. Si existe $g\circ f$, demuestre que $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Solución

En primer lugar, se demostrará la existencia de $(g\circ f)^{-1}$, es decir, la inyectividad de $g\circ f$. En efecto, sean $a,b\in D_{g\circ f}$, con $a\neq b$, entonces

$f(a)\neq f(b)$ y $g(f(a))\neq g(f(b))$ (porque f y g son inyectivas).

Luego, $(g\circ f)(a)\neq(g\circ f)(b)$, esto es, $g\circ f$ es inyectiva (existe $(g\circ f)^{-1}$).

Por otro lado, para todo elemento x del dominio de $(g\circ f)^{-1}$ se tiene:

$$y=(g\circ f)^{-1}(x)\Leftrightarrow x=(g\circ f)(y)\Leftrightarrow x=g(f(y))\Leftrightarrow g^{-1}(x)=f(y)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(x))=y$$

Luego, $(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x),\ \forall x\in D_{(g\circ f)^{-1}}$.

PROBLEMA 27. Si f y g son funciones definidas por

$$f(x)=x^2-2x+5\,,x\in\langle-2;6]\ \text{ y }\ g(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,,\ x\in[5;20\rangle$$

halle la regla de correspondencia de $g\circ f$ y su dominio.

Solución

a) Dominio: $D_{g\circ f}=\{x\ /\ x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in[5;20\rangle\}$

$$\Rightarrow x\in D_f\wedge f(x)\in[5;20\rangle\Leftrightarrow x\in\langle-2;6]\wedge 5\le x^2-2x+5<20$$
$$\Leftrightarrow x\in\langle-2;6]\wedge(-3<x\le 0\vee 2\le x<5)$$
$$\Leftrightarrow x\in\langle-2;0]\cup[2;5\rangle$$

Por tanto, $D_{g\circ f}=\langle-2;0]\cup[2;5\rangle$

www.FreeLibros.com

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x+5)=\dfrac{\sqrt{(x^2-2x+5)^2+2}}{x^2-2x+5}$

Por tanto,

$$(g\circ f)(x)=\frac{\sqrt{x^4-4x^3+14x^2-20x+27}}{x^2-2x+5}\,,\ x\in\langle-2;0]\cup[2;5\rangle\,.$$

PROBLEMA 28. Dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases}2x-1\,, & x\le-1 & \text{(d)}\\ 2\,, & -1<x\le 1 & \text{(e)}\\ x^2\,, & x>1 & \text{(f)}\end{cases}\quad\text{y}\quad g(x)=|x-2|+|x-1|$$

Halle $(f\circ g)(x)$ y trace su gráfica.

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto, $g(x)$ se escribe

$$g(x)=\begin{cases}2x-3\,, & x\ge 2 & \text{(a)}\\ 1\,, & 1\le x<2 & \text{(b)}\\ 3-2x\,, & x<1 & \text{(c)}\end{cases}$$

Considerando que el rango de g en la parte (a) es $[1;+\infty\rangle$, en la parte (b) es $\{1\}$ y en la parte (c) es $\langle 1;+\infty\rangle$, tenemos:

No existe $f\circ g$ en la combinación (a)-(d), pues $R_g\cap D_f=\emptyset$. Análogamente, no existe en las combinaciones (b)-(d), (b)-(f), (c)-(d) y (c)-(e).

Para(a)-(e)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)=2\,,\ x\ge 2\wedge(2x-3)\in\langle-1;1]$$

Para (a)-(f)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)=(2x-3)^2,\ x\ge 2\wedge 2x-3>1$$

Para (b)-(e)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1)=2,\ 1\le x<2\wedge 1\in\langle-1;1]$$

Para (c)-(f)

$$(f\circ g)(x)=f(3-2x)=(3-2x)^2,\ x<1\wedge 3-2x>1$$

Luego de hallar el conjunto solución de las desigualdades anteriores, se obtiene

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}2\,, & \text{si } x=2\\ (2x-3)^2\,, & \text{si } x>2\\ 2\,, & \text{si } 1\le x<2\\ (3-2x)^2\,, & \text{si } x<1\end{cases}=\begin{cases}2\,, & 1\le x\le 2\\ (2x-3)^2, & x<1\ \vee x>2\end{cases}$$

La gráfica de $y=g(x)$ se muestra en la Fig. 2.95 y la gráfica de $y=(f\circ g)(x)$ en la Fig. 2.96.

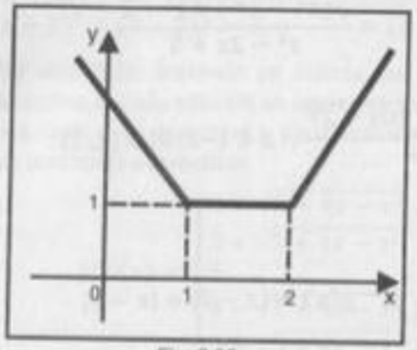


Fig. 2.95

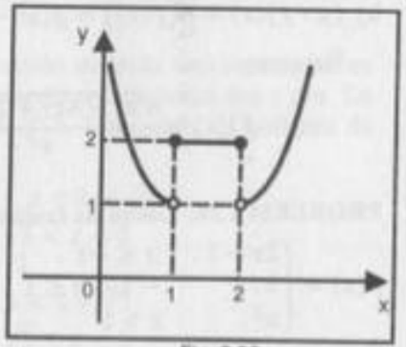


Fig. 2.96

PROBLEMA 29. Si $(f\circ g\circ h)(x)=\sqrt[3]{x^6+1}$, donde $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $h(x)=x^3$, halle $g(x)$.

Solución

Tenemos: $(f\circ g\circ h)(x)=f\big(g(h(x))\big)=f(g(x^3))=\sqrt{g(x^3)+1}$

Luego, $\sqrt{g(x^3)+1}=\sqrt[3]{x^6+1}\Leftrightarrow g(x^3)+1=(x^6+1)^{2/3}$

Haciendo $u=x^3$, se sigue: $g(u)=(u^2+1)^{2/3}-1$

Por tanto, $g(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}-1$.

PROBLEMA 30. Si $f(x+1)=x^2+4$ y $(f\circ g)(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, halle $g(x)$.

Solución

En primer término, haciendo $u=x+1$ en f, se tiene

$$f(u)=(u-1)^2+4,\ \text{de donde}\ f(x)=(x-1)^2+4.$$

Por otro lado, $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=(g(x)-1)^2+4$. Luego,

$$(g(x)-1)^2+4=\frac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow (g(x)-1)^2=\frac{9-3x}{x-2}$$

Por tanto, $g(x)=1+\sqrt{\dfrac{9-3x}{x-2}}$ ó $g(x)=1-\sqrt{\dfrac{9-3x}{x-2}}$.

www.FreeLibros.com

PROBLEMA 31. Si $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-1}$ y $(g\circ f)(x)=x^2+1$, halle $g(x)$.

Solución

Como $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g\left(\dfrac{4x+1}{x-1}\right)\Rightarrow g\left(\dfrac{4x+1}{x-1}\right)=x^2+1$ (I)

Haciendo $u=\dfrac{4x+1}{x-1}$ $\left(\text{equivalente a } x=\dfrac{u+1}{u-4}\right)$ en (I), obtenemos

$$g(u)=\left(\frac{u+1}{u-4}\right)^2+1=\frac{2u^2-6u+17}{(u-4)^2}$$

Luego, $g(x)=\dfrac{2x^2-6x+17}{(x-4)^2}$.

PROBLEMA 32. Dadas las funciones

$f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ y $(f\circ g\circ h)(x)=x^3$. Halle $(f\circ h)(1)$.

Solución

$$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=f\left(\sqrt[3]{h(x)-1}\right)=\sqrt{(h(x)-1)^{\frac{1}{3}}+1}=x^3$$

De la última igualdad se obtiene

$$(h(x)-1)^{1/3}+1=x^6\Leftrightarrow h(x)=1+(x^6-1)^3$$

Por lo tanto, $(f\circ h)(1)=f\big(h(1)\big)=f(1)=\sqrt{2}$.

PROBLEMA 33. Determine la regla de correspondencia de la función cuya gráfica se muestra en la Fig. 2.97.

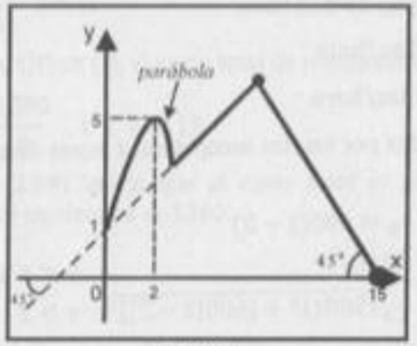


Fig. 2.97

Solución

a) Ecuación de la parábola $P\colon y = ax^2 + bx + c\,,\ a < 0$

$$(0;1) \in P \Longrightarrow 1 = 0 + 0 + c \Leftrightarrow c = 1$$

Vértice : $(2;5) = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4a}{4a}\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \wedge \frac{b^2-4a}{4a} = -5 \Leftrightarrow a = -1, b = 4$$

Luego, $P\colon y = -x^2 + 4x + 1$.

b) Ecuación de la recta que pasa por $(0;1)$ con pendiente $m = \tan(45°) = 1$

$$L_1 : y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow L_1 : y = x + 1$$

c) Ecuación de la recta que pasa por $(15;0)$ con pendiente $m = \tan(135°) = -1$

$$L_2 : y - 0 = -1(x - 15) \Leftrightarrow L_2 : y = 15 - x$$

d) La intersección de L_1 y L_2 es $(7;8)$ y la intersección de L_1 y P es $(3;4)$.

Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 4x - x^2\,, & 0 \le x \le 3 \\ 1 + x\,, & 3 < x \le 7 \\ 15 - x\,, & 7 < x \le 15 \end{cases}$$

PROBLEMA 34. El aeroplano A parte al mediodía y se dirige hacia el norte a 500 millas por hora. Dos horas más tarde, el aeroplano B vuela hacia el este a 600 millas por hora. Despreciando la curvatura de la Tierra y suponiendo que vuelan a la misma altura, encuentre una expresión para $D(t)$ (la distancia entre los aviones) t horas después del mediodía.

Solución

En el esquema de la Fig. 2.98 se tiene:

$$v_A = 500 \text{ millas/hora}$$

$$v_B = 600 \text{ millas/hora.}$$

Los espacios recorridos por los dos aeroplanos, t horas después del mediodía son respectivamente

$$e_A = 500t \ \text{ y } \ e_B = 600(t-2)$$

Por lo tanto, $D(t) = \begin{cases} 500t\,, & 0 \le t \le 2 \\ \sqrt{(500t)^2 + [600(t-2)]^2}\,, & t > 2 \end{cases}$

www.FreeLibros.com

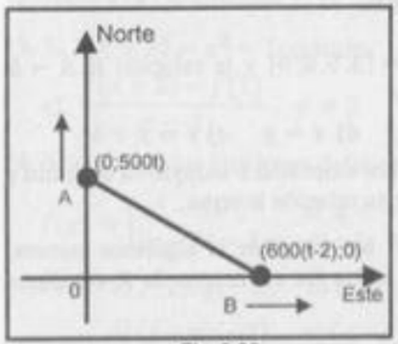


Fig. 2.98

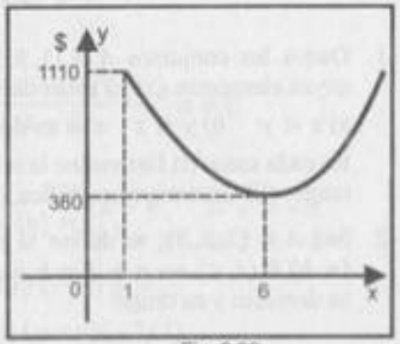


Fig. 2.99

PROBLEMA 35. Un fabricante ha recibido un pedido de 10800 unidades de un cierto artículo. Dicho fabricante dispone de 10 máquinas y cada una de ellas puede producir 60 unid/hora. El costo fijo de poner en marcha cada máquina es \$30 por máquina y el costo de operación es \$6 por hora. Determine el costo total de producción en función del número de máquinas en operación para cubrir las 10800 unidades pedidas al fabricante.

Solución

Se sabe: $Costo\ Total = Costo\ fijo + Costo\ de\ Operación$

Si x es el número de máquinas en operación, entonces el costo fijo es $30x$. Si t es el número de horas de operación y C es el costo total, entonces

$$C = 30x + 6t \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado, si operan x máquinas, en una hora producirán $60x$ unidades. Luego, las 10800 unidades serán producidas en

$$t = \frac{10800}{60x} = \frac{180}{x} \text{ horas} \qquad \text{(II)}$$

Por tanto, reemplazando (II) en (I), el costo total de producción es

$$C(x) = 30x + \frac{1080}{x}\ ,1 \le x \le 10$$

La gráfica de C (Fig. 2.99) indica que el costo total es mínimo si operan 6 máquinas y el costo total mínimo es de \$360.

EJERCICIOS

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 8, 9\}$ y la relación $R: A \to B$ cuyos elementos $(x; y)$ están definidos por

   a) $x < y$ b) $y \leq x$ c) x es divisor de y d) $x = y$ e) $y = x + 4$

   En cada caso: (i) Determine la relación R por extensión e indique su dominio y rango. (ii) Construya su gráfica. (iii) Halle su relación inversa.

2. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, se define la relación R en $A \times A$ de la siguiente manera: $(a; b)\ R\ (c; d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Halle todos los elementos de R e indique su dominio y su rango.

En los ejercicios 3-7, R es una relación en $\mathbb{R}$. Halle el dominio, el rango y trace la gráfica de R. Además, halle la relación inversa y trace su gráfica. Los elementos de cada relación están definidos por:

3. $(x; y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 3 \wedge y > 0$
4. $(x; y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 3 \vee 3x - y = 0$
5. $(x; y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 2x \wedge x \in [-2; 1)$
6. $(x; y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 36 \leq 0$
7. $(x; y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xy = 1$
8. Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dos conjuntos ¿Cuál de las tablas siguientes dan origen a funciones de A en B?

a)

x	e	o	u
y	3	2	1

b)

x	a	e	i	o	u
y	1	1	2	2	2

c)

x	a	e	o	u	a
y	2	1	5	3	4

d)

x	a	e	i	o	u
y	5	3	1	2	4

e)

x	a	e	i	o	u
y	1	4	3	2	2

f)

x	a	e	i	o	u
y	4	4	4	4	4

9. Indique cuáles de las funciones determinadas por las tablas del ejercicio anterior son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

10. Halle $f(0), f(-2),\ f\left(\frac{1}{3}\right)$ y $f(a + 2)$ si:

    a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

    c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

    d) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{4x^2 - x - 5}$

11. Si $f(x) = ax + b$ es tal que $f(3) = 1$ y $f(-3) = 6$, halle $f(x)$.

www.FreeLibros.com

12. Halle $f(x)$ si sabe que $f(2x - 1) = 4x^2 - 4x + 5$.

13. Si $f(x + 3) = x^2 - 1$, calcule:

    a) $\dfrac{f(a + 2) - f(1)}{a - 3}$, $a \neq 3$ b) $\dfrac{f(a + 2) - f(2)}{a - 2}$, $a \neq 2$

14. Sean f y g dos funciones definidas por

    $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{si } x < -2 \\ |x - 2| - 2x, & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } x > -2 \\ x^2 + 3x, & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

    Halle: a) $f(1).g(-3)$ b) $(f + g)(0)$ c) $f(-4)/g(-1)$

    d) $(f \circ g)(-2)$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(g \circ g)(-3/2)$

15. Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

    Si $g(x) = f(2x) + f(x - 2)$, halle el dominio de g.

16. Si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } |x| < 1 \\ x, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } |x| \geq 2 \\ x, & \text{si } |x| < 2 \end{cases}$

    Halle $(f + g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y trace sus gráficas.

17. Sea $f: A \to [-9; -1)$ dada por $f(x) = \dfrac{3 + 4x}{3 - x}$

    a) Determine el conjunto más grande A, sabiendo que A es el dominio de f.

    b) Demuestre que f es inyectiva.

    c) ¿f es suryectiva?

18. Sea $f: A \to (1; 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4 - 11x}{4 - 2x}$.

    a) Determine el conjunto más grande A, sabiendo que A es el dominio de f.

    b) Demuestre que f es inyectiva.

    c) ¿ f es sobre?

19. Sea $f: A \to [0; 1]$. Determine el dominio de A si:

    a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ b) $f(x) = 2 + x - x^2$ c) $f(x) = \dfrac{1 - x}{3 - x}$

20. Sea $f: A \to \langle -2; 6]$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

    a) Determine el dominio de A b) ¿f es inyectiva? c) ¿f es sobre?

21. Determine el dominio de las funciones definidas por

    a) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$ b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x - [\![x]\!]}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ e) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{12-8x}{x+5}}$ f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+4x-12} + \dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{20+x-x^2}}$

h) $f(x) = \sqrt{12 - |x-4||x+3|}$

i) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-16} + \dfrac{\sqrt[6]{x^2+x-12\,\mathrm{Sgn}(x^2+12)}}{\sqrt{|x-3| - \mathrm{Sgn}(x^4-16)}}$

j) $f(x) = \sqrt[4]{x^4-16} - \dfrac{\sqrt[3]{x^3+20x^2+4x-5}}{\sqrt{|x+3| - 2\mathrm{Sgn}(x^4-16)}}$

k) $f(x) = \sqrt{[\![x^2-1]\!] - [\![x^3-1]\!]} + \dfrac{\sqrt{1-|x-2|}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-2|}{2-x}} + \sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{x\mathrm{Sgn}(x^2-1)+1}}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{4-x^2}{\mathrm{Sgn}([\![\sqrt{4-x^2}]\!])}}$ n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x[\![x/3]\!]+10}{x^2+x-12}}$

22. Esboce la gráfica de la función f, indicando su dominio y rango.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |4-x^2|, & \text{si } |x| < 3 \\ 5, & \text{si } |x| \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]|, & \text{si } [\![x]\!] \text{ es par} \\ -\sqrt{|x| - [\![x]\!]}, & \text{si } [\![x]\!] \text{ es impar} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-[\![x/2]\!]}, & \text{si } x \in [0;5] \\ \dfrac{2}{x^2}, & \text{si } x \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10-x^2, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ -2, & \text{si } x < 0 \vee x > 3 \end{cases}$

www.FreeLibros.com

f) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ x[\![x]\!], & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \mathrm{Sgn}(x+5), & \text{si } |x| > 4 \end{cases}$

g) $f(x) = \dfrac{x+|x-2|}{2+x\,\mathrm{Sgn}(x-5)}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2+Sgn(2x-1)}{\sqrt{4-[\![x]\!]^2}}$

i) $f(x) = \sqrt{2[\![5x+4]\!] - 10[\![x]\!]}$ j) $f(x) = x - \mathrm{Sgn}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}\right)$

23. Si tres lados de un trapecio isósceles miden 10 cm, cada uno, halle el área del trapecio en función del cuarto lado.

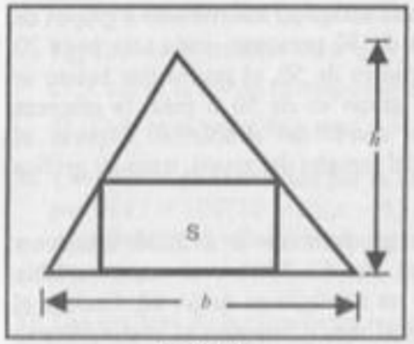


Fig. 2.100

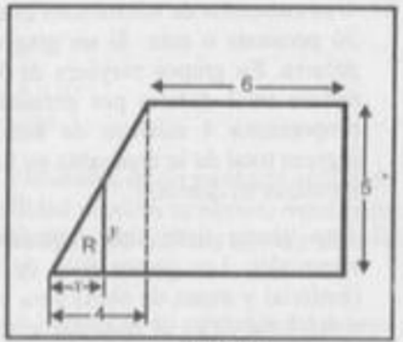


Fig. 2.101

24. En un triángulo de 10 cm. de base y 6 cm. de altura está inscrito un rectángulo (Fig. 2.100). Exprese el área del rectángulo en términos de su base.

25. En la Fig. 2.101 se muestra un trapecio con las medidas indicadas. Exprese:

a) y en función de x b) El área de la región R en términos de x

26. Escribir en forma analítica la función definida en el intervalo $\langle -\infty; 6]$, si se sabe que su gráfica consta de los puntos del eje x cuyas abscisas son menores que -3; de los puntos de la parábola simétrica respecto al eje y que pasa por los puntos $A(-3;0)$, $B(0;5)$; y por los puntos del segmento de extremos $C(3;0)$ y $D(6;2)$.

27. Para construir una caja abierta, se cortan cuadrados de lado x pulgadas en las cuatro esquinas de un cartón de 24×32 pulgadas^2 y se doblan los lados. Exprese el volumen de la caja en términos de x y halle el dominio de esta función.

28. Una caja cerrada de base cuadrada debe tener un volumen de 250 cm^3. Si se sabe que el material para la base y la tapa cuesta S/. 3 por cm^2, exprese el costo de construcción de la caja como una función de la longitud de su base.

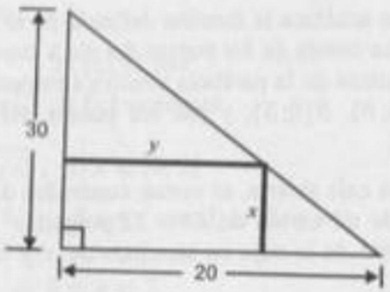
29. Un agricultor estima que si se plantan 60 manzanas, la producción media por árbol será de 400 manzanas. La producción media decrecerá en 4 manzanas por árbol, por cada árbol adicional plantado en la misma extensión de terreno. Exprese la producción total del agricultor como una función del número adicional de árboles plantados.

30. Un fabricante de chompas de alpaca puede producir cada chompa a un costo de 3 dólares. Las chompas han sido vendidas a 6 dólares cada una y, a este precio, los consumidores han estado comprando 4000 chompas al mes. El fabricante está planeando subir el precio de las chompas y estima que por cada dólar de aumento en el precio se venderán 400 chompas menos cada mes. Exprese el beneficio mensual del fabricante como una función del precio al que se venden las chompas.

31. Una compañía de microbuses está dispuesta a alquilar micros sólo a grupos de 30 personas o más. Si un grupo consta de 30 personas, cada uno paga 20 dólares. En grupos mayores de 35 y menores de 50, el precio por boleto se reduce en 2 dólares por persona. Si el grupo es de 50 o más, la empresa proporciona 4 asientos de bonificación aparte del descuento. Exprese el ingreso total de la compañía en función del tamaño del grupo, trace su gráfica e indique su dominio.

32. Una planta tiene una capacidad para producir de 0 a 2000 artefactos mensuales. Los gastos fijos de la planta son S/. 3200 y el costo variable (material y mano de obra) para producir un artefacto es de S/. 80. Escriba el costo total $C(x)$ al producir x artefactos al mes y también el costo unitario $u(x)$(costo medio por artefacto). Además, indique los dominios de estos modelos matemáticos.

33. En un terreno que tiene la forma de un triángulo rectángulo con catetos de 20 y 30 metros, se desea construir una casa rectangular de dimensiones x e y, como se indica en la figura:



a) Halle y en función de x.

b) ¿Para qué valores de x e y el área ocupada por la casa será máxima?

www.FreeLibros.com

34. Se estima que de aquí a t años el número de personas que visiten el Museo de La Nación será dado por $N(t) = 30t^2 - 120t + 3000$

a) Actualmente, ¿cuál es el número de personas que visitan el Museo de la Nación?

b) ¿Cuántas personas visitarán el Museo en el décimo año?

c) ¿En qué año será registrado el menor número de visitantes?

35. Un profesor de Cálculo I propone a un grupo de 40 alumnos de su sección un ejercicio desafío, comprometiéndose a dividir un premio de S/. 120 entre los que resuelvan correctamente. Sea x el número de alumnos que resolvieron correctamente ($x = 1, 2, \ldots\ldots, 40$) e y la cantidad recibida por cada alumno que ha resuelto correctamente (en nuevos soles), responda:

a) ¿y es función de x? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es el máximo valor que y tiene?

c) ¿Cuál es la ley de correspondencia entre x e y?

d) ¿Cuál es el valor de y para $x = 2$ y $x = 8$?

36. La utilidad de una tienda por la venta de x unidades de un producto está dada por $U(x) = 100(10 - x)(x - 4)$. Si la utilidad máxima se obtiene vendiendo n unidades y el valor correspondiente de la utilidad es u, halle el valor de n y de u.

37. Las gráficas de las funciones reales f y g se intersecan en un punto del primer cuadrante. Si $f(x) = x + 7$ y $g(x) = -2x + k$, donde k es una constante, entonces k satisface la condición:

a) $k > 7$ b) $1 < k < 7$ c) $-1 < k \leq 0$ d) $-7 < k \leq -1$

38. Un técnico de electrónica cobra S/. 50 por visita y S/. 40 por hora de trabajo. Si él trabajó x horas y recibió p nuevos soles, entonces:

a) $p = 50x + 40$ b) $p = 50x + 90$ c) $p = 40x + 50$ d) $p = 150x$

39. Una función que representa el valor a ser pagado después de un descuento de 4% sobre el valor x de una mercadería es:

a) $f(x) = x - 4$ b) $f(x) = 0{,}96x$ c) $f(x) = 1{,}04x$ d) $f(x) = -4x$

40. El valor de una maquinaria decrece linealmente en el tiempo debido al desgaste. Se sabe que el precio de venta es US \$ 7500 y que después de 6 años de uso su valor es US \$ 1200. Su valor después de 4 años de uso, en dólares, es:

a) 2100 b) 3300 c) 3180 d) 3750

41. Si $f(\sqrt{x} + 6\sqrt[4]{x}) = \sqrt{x} + 6\sqrt[4]{x} + 20$, $x \geq 1$. Halle $f(x)$ e indique D_f.

42. Sean $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Halle el dominio y la regla de correspondencia de la función definida por

$$F(x) = \frac{f(\sqrt[3]{x})}{2g(x) - f(2x)}$$

43. Si $f(x) = \sqrt{5 + [\![10x]\!]}$ y $g(x) = 1/[\![x^3 - 8]\!]$, halle el dominio y la regla de correspondencia de la función definida por $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

44. Determine el período de las funciones

a) $f(x) = \sqrt{[\![7x]\!] - 7[\![x]\!]}$

b) $g(x) = 8[\![x]\!] - [\![8x]\!]$

45. Verifique si las siguientes funciones son pares o impares. Justifique su respuesta.

a) $f(x) = -x^3 + x$ b) $f(x) = |x| + 4x^2$

c) $f(x) = -\dfrac{x}{|x|}$ d) $f(x) = x^3 - 2x^2$

46. Sea A un conjunto simétrico con respecto al origen, esto es, si $x \in A$, entonces $-x \in A$. Pruebe que para toda función $f: A \to \mathbb{R}$:

a) $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ es función par.

b) $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ es función impar.

47. Si $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = x + a$, determine el valor de a de modo que $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$.

48. Halle $f(x)$ si

a) $g(x) = 1 - x^2$ y $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

b) $g(x) = 2x + 3$ y $f(g(x)) = 4x^2 + 12x + 9$.

49. Si $f(x) = 3x + 2a$, determine los valores de a de modo que se cumpla: $f(a^2) = f^{-1}(a + 2)$.

50. Si $f(x) = 2x + c$ y $f(c) = 2f^{-1}(c^2)$, encuentre el valor de

a) $f(0) \cdot f^{-1}(0)$ b) $\dfrac{f(1)}{f^{-1}(1)}$

51. Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$, determine la regla de correspondencia de la función inversa e indique su dominio.

www.FreeLibros.com

52. Dada la función $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$.

a) Probar que f es inyectiva b) Determinar su función inversa

c) Determinar el dominio de f^{-1}

53. Determine, si existe, la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \in \langle -\infty; -2 \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $x \in [-2; 1]$

54. Dada la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ |x|, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Verifique si f tiene función inversa. En caso afirmativo, determine dicha función.

55. Dada la función $f(x) = -\sqrt{x^2 + 6x - 7}$, $x \in \langle -\infty; -7]$, halle la función inversa de f.

56. Si $f(t) = t^{2/3} - 4$, $t < 0$, demuestre que f es inyectiva, halle $f^{-1}(x)$ e indique su dominio. Además, determine si f es par o impar.

57. Dadas las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3\operatorname{Sgn}(9 - x^2) - x}, & x < -3 \\ [\![9 - x^2]\!], & -3 \leq x < 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \frac{9 - x}{x - 5}$$

Halle $(g \circ f)(x)$, indicando su dominio.

58. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|1 - x| - 2}, & \text{si } x > 3 \\ [\![x^2 - 1]\!], & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x + 1}{x - 4}$$

Determine $g \circ f$ e indique su dominio.

59. Si $f(x) = \dfrac{1 - 16x^2}{x^2 - 16}$, $0 \leq x \leq 1$ y $g(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1 + 16x}{x + 16}}$, $-\dfrac{1}{16} \leq x \leq 1$

determine $f^{-1} \circ g^{-1}$ e indique su dominio y rango.

60. Dadas las funciones definidas por:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{16 - x^4}, \quad \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 2 \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$g(x) = \sqrt[4]{16 - x^2}, \quad \text{si } x \in [0; 4] \quad ; \quad F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

a) Determine $(f \circ g)^{-1}$ e indique su dominio.

b) Esboce la gráfica de $(f \circ g)^{-1}$.

c) Determine $h \cdot (f \circ g)^{-1}$.

d) ¿Es inyectiva $h \cdot (f \circ g)^{-1}$?

e) Determine $h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$ e indique su dominio.

f) Determine $F.(f \circ g)^{-1}$ e indique su dominio.

g) Determine $F \circ (f \circ g)^{-1}$ e indique su dominio.

61. Sea $f(x) = \dfrac{|x+8| + \text{Sgn}(x^2 - 10x + 9)}{x - 1}$, $g(x) = x^2 + 4x - 45$ y

$h(x) = x^2 - 6\,\text{Sgn}(x - 2) - 4$. Calcule:

$$p = \frac{(f \circ h)(2) - (f \circ g)(5) \cdot (h \circ g)(-9) + (g \circ f)(0)}{(f \circ h \circ g)(5) + (g \circ f \circ h)(2)}$$

62. Sea $f(x) = (x - |x+2| + 3)\sqrt{x+2}$. Si existe, halle $f^{-1}(x)$.

63. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{\text{Sgn}\,(x^2 - 1)}{[\![x+1]\!]}}$, $x \geq 1$ y $g(x) = 4 - x^2$, $x \leq 0$.

Halle $g^{-1} \circ f$ e indique su dominio.

64. Sea $f(x) = \sqrt{2-x} + [\![2 - x]\!]$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{2 + x}}$.

a) Halle $(f - g)(x)$ e indique su dominio y rango.

b) Halle $(f \circ g)^{-1}(x)$ e indique su dominio.

65. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones. Pruebe que:

a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

b) Si f y g son suryectivas, entonces $g \circ f$ es suryectiva.

c) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

d) Si $g \circ f$ es sobre, entonces g es sobre.

66. La editorial Z vende un libro a 6 dólares cada uno y, a este precio, los consumidores han estado comprando 6000 libros mensuales. El editor desearía elevar el precio y estima que por cada dólar de incremento en el precio se venderán 1000 libros menos cada mes. Si se sabe que el editor produce los libros a un costo de 4 dólares por libro, halle la función utilidad en términos del precio de venta por libro.

www.FreeLibros.com

67. El costo total para producir x unidades por día del producto Z es $\left(\dfrac{x^2}{2} + 20x + 5\right)$ soles y el precio de venta de una unidad es $p = (30 - x)$ soles.

a) Halle la función ingreso total.

b) Halle la función utilidad.

c) ¿Cuál es el costo medio para $x = 10$?

d) ¿Cuál es la función demanda?

68. Suponga que el costo total está dado por $C_t = 10 + x$, y el ingreso total por $I_t = 10x - 0{,}5x^2$ ¿Cuál es el valor de x para el cual se obtiene la ganancia máxima?

69. Determine el punto crítico y hacer gráfico en cada caso.

a) $I_t = 100x$, $C_t = 50 + 3x$ b) $I_t = 10x - 0{,}5x^2$, $C_t = 10 + x$

c) $I_t = 80x$, $C_t = 0{,}1x^2 + 5x + 200$

70. Determine el punto de equilibrio y trace el gráfico en cada caso. Además, indique el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio (abscisa y ordenada, respectivamente, del punto de equilibrio).

a) $D = \dfrac{10 - p}{5}$, $O = p + 1$ b) $D = \dfrac{500}{p + 10} + 80$, $O = 50 + 2p$

71. La piscina mostrada en la Fig. 2.102 tiene 4 pies de profundidad mínima, 10 pies de profundidad máxima, 60 pies de largo, 40 de ancho y el fondo es un plano inclinado. Exprese el volumen V del agua contenido en la piscina en función de la altura del nivel del agua desde el extremo más profundo.

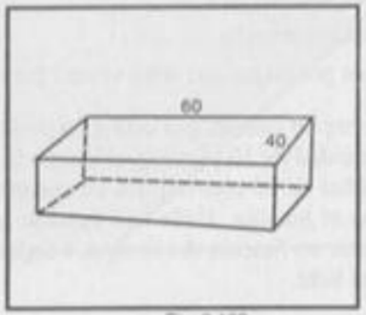


Fig. 2.102

72. La relación funcional entre grados Celsius (T_c) y grados Farenheit (T_f) es lineal. Exprese T_f en función de T_c , si ($0°C; 32°F$) y ($60°C; 140°F$) están en la gráfica de T_f. Demuestre que $100°C$ es equivalente al punto de ebullición en escala Farenheit de $212°F$.

73. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Si f es una función periódica, de periodo $t = 5$ y $f(3) = 6$, halle $f(-22)$.

b) Dada una función f con dominio $[-8; 9]$ y una función h definida por $h(x) = f(x) + f(-x)$, determine si h es una función par, impar o ninguna de éstas.

c) Si f y g son funciones reales impares con dominio $D_f = [-20; 20]$ y $D_g = [-5; -2] \cup [2; 5]$, respectivamente, ¿entonces $f + g$ es también una función impar?

d) Si $g(f(x)) = x + 8$ y $f(x) = x + 2b$, halle $g(x)$ y determine si existe algún valor de b para el cual $g(x)$ sea la función identidad.

e) Dada una función f de la forma $f(x) = \sqrt{|x-a| - 2} + b$, tal que $f(4) = 10$ y $f(3) = b + 2$, halle $f(2)$ (dos soluciones).

74. Dado un cuadrado ABCD, cuyo lado mide $10u$, se traza una recta perpendicular a su diagonal BD, la cual divide al cuadrado en dos polígonos. Determine una función que exprese el área del polígono que incluye al vértice B en función de x, donde x es la distancia de B a la recta perpendicular a BD. Además, indique su dominio.

$$\text{R. } A(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 5\sqrt{2} \\ 100 - (10\sqrt{2} - x)^2, & 5\sqrt{2} \le x < 10\sqrt{2} \end{cases}$$

75. Un fabricante estima que su costo de producción es $C(x) = 12x + 3600$, donde x es el número de unidades vendidas al mes. La ecuación de demanda es $x + p = 324$, donde p es el precio unitario en soles. Determine

i) El ingreso como una función de x.

ii) La gráfica de la función ingreso.

iii) El menor número de productos que debe vender para no perder dinero.

76. Un hombre camina sobre un puente, que está a 20 pies de altura sobre el nivel del agua, con una velocidad de 10 pies/seg, mientras que un bote pasa bajo el puente con una velocidad de 20 pies/seg. En un instante determinado, el bote está precisamente bajo el hombre. Halle una función que nos dé la distancia entre el hombre y el bote en función del tiempo, t segundos después de que el hombre estuvo sobre el bote.

77. En la Fig 2.103 se muestran las posiciones relativas de un avión y una torre de control de 40 pies de alto. El inicio de la pista se encuentra a una distancia de 600 pies de la base de la torre, sobre la perpendicular hacia la pista. Exprese la distancia d de la aeronave a la torre de control como una función de la distancia x que el avión ha recorrido sobre la pista.

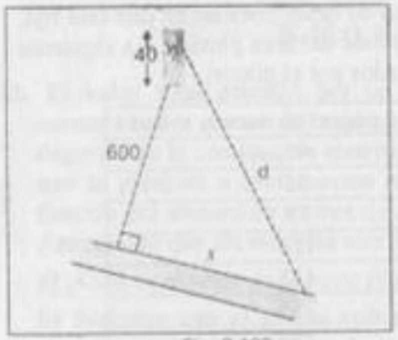
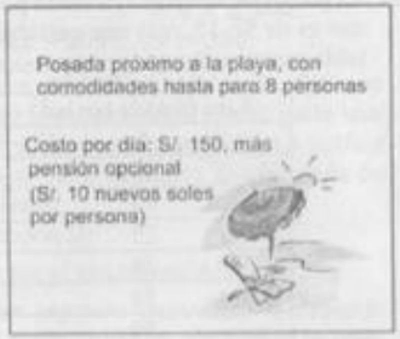


Fig. 2.103



78. La familia del señor Luis quedó tan entusiasmada con el anuncio encontrado en una playa del sur, dado en la figura 2.104, que se quedó 10 días en dicha playa. Entre pensión y costo de la posada, gastaron en total 2100 nuevos soles.

a) Exprese el gasto de la familia en función del número de personas

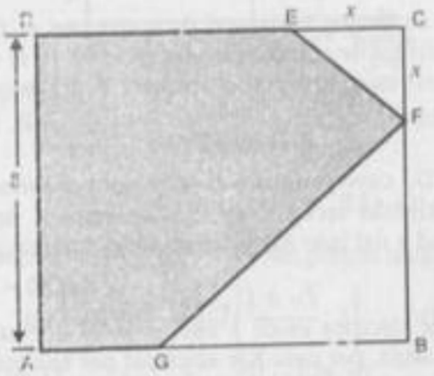
b) Descubra cuántas personas de la familia estuvieron en la playa R. 6

79. En el cuadrado ABCD, con 8 cm de lado, determine:

a) El área de la figura sombreada en función de x.

b) El valor de x para que dicha área sea máxima. R. 4

c) El área máxima. R. 48 cm^2



80. La utilidad de una empresa es dada por $U(x) = -30x^2 + 360x - 600$, donde x es el número de unidades vendidas ¿Para qué valor de x la utilidad es máxima? R. 6

www.FreeLibros.com

81. El precio de servicio ejecutado por un pintor de casas consiste en una tasa fija, que es de S/. 15, más una cantidad que depende del área pintada. La siguiente tabla muestra algunos presupuestos presentados por el pintor:

Área pintada (en m^2)	Total a pagar (en nuevos soles)
5	45
10	55
15	75
25	115
30	135
50	215
70	295

a) ¿Cómo se expresa, matemáticamente, el total a pagar (y) por la pintada de x metros cuadrados? R. $15 + 4x$

b) ¿Cuál es el precio cobrado por la pintada de un área de 200 cm^2?

R. S/. 815

c) ¿Cuál es el área máxima que puede ser pintada si se dispone de S/. 1215?

R. 300m

82. Un profesor de matemática disponía de 144 caramelos para dividir igualmente entre los alumnos de su clase. Como el día de la distribución faltaron 12 alumnos, él dividió los 144 caramelos de manera equitativa entre los presentes, tocándole a cada alumno un caramelo más. ¿Cuántos alumnos estaban presentes el día de la distribución? R. 36

83. Se desea construir un tanque horizontal de acero, con el fin almacenar gas propano, que tenga forma de cilindro circular recto de 10 m de largo, con una semiesfera en cada extremo. Expresar el volumen V del tanque en función del radio de la semiesfera (r). R. $10\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$

84. Un rectángulo ABCD, cuyo perímetro es 60 m, gira en torno de su lado AB y genera un cilindro circular recto. Exprese el volumen V de este cilindro en función de la longitud x del lado AB y determine el dominio de $V(x)$.

R. $\pi x(30 - x)^2$; $\langle 0; 30\rangle$

85. La tarifa de energía eléctrica es de 3 nuevos soles por cada Kw hasta los primeros 200 Kw. Luego, por cada Kw adicional por encima de 200, la tarifa es de 4 nuevos soles. Así, por ejemplo, si en una casa se consumen 250 Kw en un mes, el pago por el consumo sería calculado así:

Los primeros 200 Kw .... 3×200 = S/. 600
Los 50 Kw adicionales .... 4×50 = S/. 200
TOTAL : S/. 800

Si en una casa se consume x Kw al mes, exprese el pago $P(x)$ por consumo de energía eléctrica en función de x.

www.FreeLibros.com

$$\text{R. } P(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 200 \\ 600 + 4(x - 200), & x > 200 \end{cases}$$

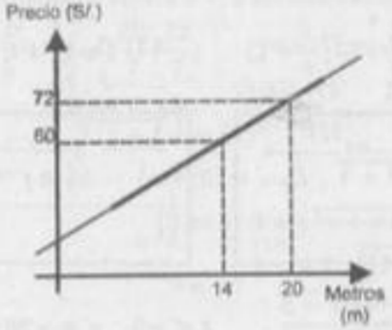
86. El valor total cobrado por un electricista A incluye una parte fija que corresponde a gastos de transporte, tiempo invertido, etc.; y otra parte que depende de la cantidad de metros de cable utilizado en el servicio. La gráfica que se presenta a continuación representa el valor del servicio efectuado en función del número de metros de cable utilizado.

Asumiendo que los modelos son lineales, responda:

a) ¿Cuál es el valor de la parte fija cobrada por el electricista A?

b) Suponga que el precio cobrado por un segundo electricista B depende únicamente del número de metros del cable utilizado, sin cobrar la parte fija. Si el precio del servicio es de S/. 4 por metro de cable utilizado, ¿a partir de qué metraje debe el consumidor preferir el servicio del electricista A en vez del servicio del electricista B?

R. a) S/. 32 b) 16m



RESPUESTAS

8) a, b, c, d y f 11) $\frac{7}{2} - \frac{5x}{6}$ 13) a) $a + 3$ b) a

15) $\emptyset$ 17) a) $\langle -\infty; -2] \cup [6; +\infty\rangle$ ( ) No, porque no asume el valor de -4

19) a) $\langle 0; +\infty\rangle$ b) $\left[-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$ c) $\langle -\infty; 1]$

21) a) $\langle -\infty; -1] \cup [0; 1]$ b) $[-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$ c) $\langle -\infty; +\infty\rangle$

d) $\langle -1; 2]$ e) $\langle -5; \frac{3}{2}]$ f) $\langle -2; +\infty\rangle$ g) $[2; 5\rangle$

h) $\left[\frac{1-\sqrt{97}}{2}; 0\right] \cup \left[1; \frac{1+\sqrt{97}}{2}\right]$ i) $\langle -\infty; -4] \cup \langle 4; +\infty\rangle$

j) $\langle -\infty; -5\rangle \cup [\sqrt{2}; +\infty\rangle - \{-2\}$ k) $\langle 1; \sqrt[3]{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt[3]{3}\rangle$

l) $[1;2\rangle \cup \{-1\}$ m) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ n) $\langle-\infty;-4\rangle \cup \langle 3;+\infty\rangle$

23) $\dfrac{(10+x)\sqrt{300+20x-x^2}}{4}$ 24) $A(x)=0{,}6x(10-x)$

25) a) $y=\begin{cases}\dfrac{5x}{4}, & \text{si } 0\le x\le 4\\ 5, & \text{si } 4<x\le 10\end{cases}$ b) $A(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^2}{8}, & \text{si } 0\le x\le 4\\ 5(x-2), & \text{si } 4<x\le 10\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \dfrac{5}{9}x^2+5, & -3\le x\le 3\\ \dfrac{2}{3}x-2, & 3<x<6\end{cases}$ 28) $C(x)=6x^2+\dfrac{500}{x},\ x>0$

30) $B(x)=400(16-x)(x-3),\ 6\le x\le 16$

32) $C(x)=80x+3200,\ 0\le x\le 2000$

$M(x)=\dfrac{80x+3200}{x},\ 1\le x\le 2000,\ x\in\mathbb{N}$

41) $f(x)=x+20,\ D_f=[7;+\infty\rangle$ 43) $D_h=\langle-\frac{1}{2};2\rangle\cup[\sqrt[3]{9};+\infty\rangle$

44) a) $T=1$ b) $T=1$ 47) $-8/7$

50) a) -8 b) -4 51) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1+x^{-2}},\ D_{f^{-1}}=\langle 0;+\infty\rangle$

53) a) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2+4},\ D_{f^{-1}}=\langle 0;+\infty\rangle$ b) $\nexists f^{-1}(x)$

55) $f^{-1}(x)=-3-\sqrt{16+x^2},\ x\in\langle-\infty;0]$

56) $f^{-1}(t)=-\sqrt{(t+4)^3},\ t>-4$

57) $(g\circ f)(x)=\begin{cases}\dfrac{9-\sqrt{-x-3}}{\sqrt{-x-3}-5}, & x<-3,\ x\neq-28\\ \dfrac{-[\![-x^2]\!]}{[\![4-x^2]\!]}, & -3\le x<-2 \text{ ó } -\sqrt{3}\le x<0\end{cases}$

58) $Dom=\langle 0;\sqrt{5}\rangle\cup\langle\sqrt{6};+\infty\rangle-\{19\}$

59) $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=x^2,\ Dom=[-1;0]$ y $Rang=[0;1]$

61) 9/5 62) $f^{-1}(x)=x^2-2,\ x\ge 0$

64) a) $Dom=\langle-\infty;2]-\{-2\},\ Rang=\{y\in\mathbb{Z}\ /\ y\ge 0\}$

b) $Dom=\langle 0;1\rangle\cup[2;\sqrt{2}+1\rangle\cup\{\sqrt{2}+2\}$

66) $U(x)=1000(12-x)(x-4),\ x=precio,\ 6\le x<12$

68) 9 71) $V(x)=\begin{cases}200x^2, & 0<x\le 6\\ 7200+2400(x-6), & 6<x\le 10\end{cases}$

74) $A(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<5\sqrt{2}\\ 100-(10\sqrt{2}-x)^2, & 5\sqrt{2}\le x<10\sqrt{2}\end{cases}$

76) $s(t)=\sqrt{500t^2+400},\ t\in[0;+\infty\rangle$ 77) $d(x)=\sqrt{x^2+361600}$

www.FreeLibros.com

3 LÍMITES

3.1 VECINDAD DE UN PUNTO

Definición 1. Sea $a\in\mathbb{R}$, se llama **vecindad abierta** o **bola abierta** de centro a y radio $\delta>0$, y se denota por $B(a;\delta)$, al intervalo $\langle a-\delta;a+\delta\rangle$; es decir, $B(a;\delta)=\langle a-\delta;a+\delta\rangle$

En la figura 3.1 se observa que el punto a es el punto medio del intervalo.

Ejemplo 1. Son vecindades de centro $a=3$ los intervalos:

$$\left(3-\frac{1}{7};3+\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{20}{7};\frac{22}{7}\right),\quad\left(3-\frac{1}{4};3+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{11}{4};\frac{13}{4}\right)$$

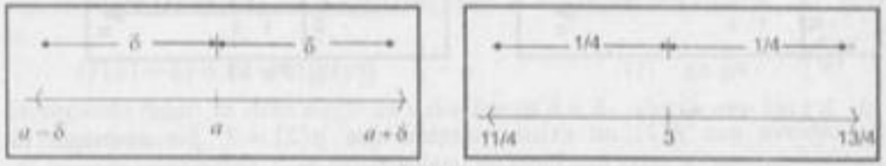


Fig. 3.1

3.1.1 PROPIEDADES

1) $B(a;\delta)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ |x-a|<\delta\}$

Demostración

$$x\in B(a;\delta)\Leftrightarrow x\in\langle a-\delta;a+\delta\rangle\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$$
$$\Leftrightarrow -\delta<x-a<\delta\Leftrightarrow|x-a|<\delta$$
$$\Leftrightarrow x\in\{x\in\mathbb{R}\ /\ |x-a|<\delta\}$$

2) La intersección de dos vecindades de centro a es una vecindad de centro a, esto es, $B(a;\delta_1)\cap B(a;\delta_2)=B(a;\delta)$, donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Demostración

$$x\in(a;\delta_1)\cap B(a;\delta_2)\Leftrightarrow x\in B(a;\delta_1)\wedge x\in B(a;\delta_2)$$
$$\Leftrightarrow|x-a|<\delta_1\wedge|x-a|<\delta_2$$
$$\Leftrightarrow|x-a|<\delta,\ \text{donde } \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$$

3.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Uno de los conceptos básicos y fundamentales en el cálculo es el del **límite**. La noción de límite es muy importante para precisar otros, tales como continuidad, derivación, etc. En el siguiente ejemplo, se verá la idea de límite.

Ejemplo 2 Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = x + 3,\ x \neq 2 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$$

Las gráficas de estas funciones se muestran en las figuras 3.2 y 3.3.

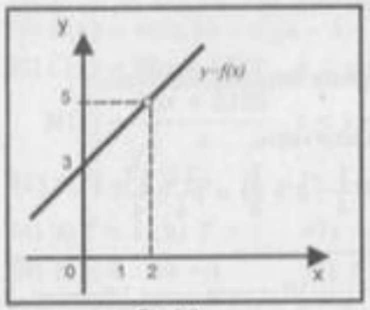


Fig 3.2

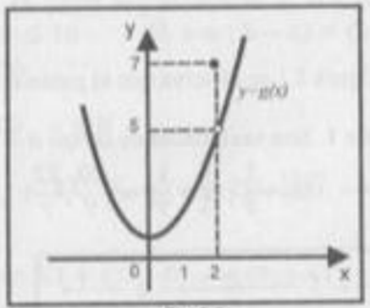


Fig 3.3

Se observa que $f(2)$ no existe, mientras que $g(2) = 7$. Sin embargo, el comportamiento de estas funciones en una vecindad de 2, excluyendo el punto 2, es exactamente el mismo y puede ser descrito del siguiente modo:

Para valores de x próximos a 2, con $x \neq 2$, los valores de $f(x)$ y $g(x)$ se aproximan al número $L = 5$. En el caso de la función f, se dice que 5 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende (o se aproxima) a 2 y se denota por $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. Análogamente, para la función g se dice que 5 es el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 2, y se representa por $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$.

Se observa que el límite de f cuando x tiende a 2 no depende de $f(2)$ (en este caso no existe), sino de los valores que f toma cuando x es próximo a 2.

Definición 2 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto que no necesariamente pertenece a D_f, pero que toda vecindad de a contiene puntos de D_f. Se dice que el **límite de $f(x)$ es L, cuando x tiende hacia a**, y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, cuando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in D_f,\ x \neq a \text{ y } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

En términos del valor absoluto, esta definición tiene la forma

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in D_f,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

www.FreeLibros.com

Usando vecindades, la definición es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in B(a;\delta) \cap D_f,\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in B(L;\varepsilon)$$

El concepto de límite plantea el siguiente problema:

¿Qué tan cerca de a se debe tomar el valor de x para que $f(x)$ diste de L en un número muy pequeño prefijado?

Ejemplo 3. Si $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$, ¿qué tan cerca de 1 debe estar x para que $|f(x) - 3| < 0{,}01$?

Solución

Dado $\varepsilon = 0{,}01$, se desea que $|f(x) - 3| < 0{,}01$. Para encontrar un δ adecuado, se observa que

$$|f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = 2|x - 1| < 0{,}01$$

De esta última desigualdad se deduce que $|x - 1| < 0{,}005$, lo cual significa que si x dista de 1 en menos de 0,005, entonces $f(x)$ dista de 3 en menos de 0,01.

Observación 1. *Para comprobar el límite por definición, inicialmente se debe descomponer $|f(x) - L|$ en dos factores, uno de los cuales debe ser $|x - a|$, esto es,*

$$|f(x) - L| = |x - a||g(x)| \qquad (1)$$

En segundo lugar, se debe elegir un valor inicial $\delta = \delta_1$ para acotar $|g(x)|$, de tal manera que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < M \ (M > 0) \qquad (2)$$

Así, de (1) y (2) se tiene

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| = |x - a||g(x)| < |x - a|M$$

Ahora, haciendo $|x - a|M < \varepsilon$, se obtiene $|x - a| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta_2$

Luego, el valor adecuado para δ es $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$.

En resumen, si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = |x - a||g(x)| < \varepsilon$. Lo cual demuestra que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Observación 2 *En la demostración de límites, es necesario tener en cuenta las siguientes recomendaciones:*

a) *Proponer un valor inicial de δ, esto es $\delta = \delta_1$ de modo que $0 < |x - a| < \delta_1$. Generalmente, se toma $\delta_1 = 1$, pero si este valor es inadecuado, se debe considerar otro más pequeño.*

b) *Al elegir el valor inicial δ_1, se debe tener cuidado de que no haya asíntota vertical de $g(x)$ dentro del intervalo $(a - \delta_1 ; a + \delta_1)$.*

c) *Para acotar $g(x)$ para el valor δ_1 elegido, es necesario tener presente las siguientes propiedades de las desigualdades y del valor absoluto.*

i) *Si* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow a - \delta < x < a + \delta$

ii) *Si* $a < u < b \Rightarrow |u| < \text{máx}\{|a|, |b|\}$

Por ejemplo, si $-4 < 3x - 9 < 2 \Rightarrow |3x - 9| < 4, (4 = \text{máx}\{|-4|, |2|\})$

iii) *Si* $a < u < b \Rightarrow u^2 < k^2$ *donde* $k = \text{máx}\{|a|, |b|\}$

d) *Si* $\delta > 0$ *satisface la definición de límite, cualquier otro* δ' *con* $0 < \delta' < \delta$, *también satisface dicha definición.*

Ejemplo 4. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, pruebe que $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$.

Solución

Dado $\varepsilon > 0$, se debe probar que si $0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$.

Teniendo en cuenta la observación 1, se debe trabajar con $|f(x) - 6|$, esto es,

$|f(x) - 6| = |3x^2 + 2x + 1 - 6| = |(x - 1)(3x + 5)| = |x - 1||3x + 5|$ (1)

Para $\delta_1 = 1$ buscaremos un número positivo M tal que,

$0 < |x - 1| < 1 \Rightarrow |3x + 5| < M$

En efecto, si $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < 3x < 6 \Rightarrow 5 < 3x + 5 < 11$

$\Rightarrow |3x + 5| < 11$ (2)

Multiplicando (2) por $|x - 1|$, se obtiene $|x - 1||3x + 5| < 11|x - 1|$.

De lo anterior, se deduce que $11|x - 1| < \varepsilon$ si $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{11}$. En resumen,

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{11}\right\}$ tal que

$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| = |x - 1||3x + 5| < 11|x - 1| < \varepsilon$

Por tanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$.

Ejemplo 5 Si $f(x) = k$ (k constante), demuestre que $\lim_{x \to a} f(x) = k$, donde a es cualquier número real (el límite de una constante es la misma constante).

Solución

Sea $\varepsilon > 0$, para cualquier $\delta > 0$ se tiene

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Luego, $\lim_{x \to a} k = k$

Ejemplo 6. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, pruebe que $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$.

Solución

Sea $\varepsilon > 0$, se debe probar que $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$

El hecho de que $0 < |x - 3|$ equivale a $x \neq 3$ y

$$|f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = \left|\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6\right| = |x - 3|$$

Por tanto, $|f(x) - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \varepsilon = \delta$

En resumen, para $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \varepsilon$ / $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$

Ejemplo 7. Demuestre que $\lim_{x \to 5} \dfrac{x + 3}{x - 3} = 4$

Solución

Se debe probar que si $0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{x + 3}{x - 3} - 4\right| < \varepsilon$.

Por otro lado, se tiene $\left|\dfrac{x + 3}{x - 3} - 4\right| = \left|\dfrac{-3(x - 5)}{x - 3}\right| = \dfrac{3|x - 5|}{|x - 3|}$

Si $\delta_1 = 1$, entonces

$0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow 4 < x < 6 \Rightarrow 1 < x - 3 < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x - 3} < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x - 3|} < 1 \Rightarrow \dfrac{3|x - 5|}{|x - 3|} < 3|x - 5| < \varepsilon \Rightarrow |x - 5| < \dfrac{\varepsilon}{3} = \delta_2$.

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \text{mín}\left\{\delta_1 = 1, \delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ tal que

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x + 3}{x - 3} - 4\right| = \frac{3|x - 5|}{|x - 3|} < 3|x - 5| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Ejemplo 8. Si $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x}}$, compruebe que $\lim_{x \to 4} f(x) = \dfrac{1}{4}$

Solución

1°) $\left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{1}{2 + \sqrt{x}} - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{2 - \sqrt{x}}{4(2 + \sqrt{x})}\right|$

$$= \left|\frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{4(2 + \sqrt{x})^2}\right| = |x - 4| \cdot \frac{1}{4(2 + \sqrt{x})^2}$$

www.FreeLibros.com

2°) Tomando $\delta_1 = 1$, se tiene

$$0<|x-4|<1 \Rightarrow 3<x<5 \Rightarrow \sqrt{3}<\sqrt{x}<\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}+2<\sqrt{x}+2<\sqrt{5}+2 \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}<\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-4|}{4(2+\sqrt{x})^2}<\frac{|x-4|}{4(2+\sqrt{3})^2}<\varepsilon \text{ si } |x-4|<4(2+\sqrt{3})^2\varepsilon=\delta_2$$

3°) Finalmente, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta = \text{mín}\{\delta_1=1, \delta_2=4(2+\sqrt{3})^2\varepsilon\}$ tal que

$$0<|x-4|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{4}\right| = \frac{|x-4|}{4(2+\sqrt{x})^2}<\varepsilon$$

Ejemplo 9. Pruebe que $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+6x^2-x-19)=-1$.

Solución

1°) $|x^3+6x^2-x-19-(-1)| = |x+2||x^2+4x-9|$

2°) Elegimos $\delta_1 = 1$, entonces

$$0<|x+2|<1 \Rightarrow -3<x<-1 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x^2 < 9 \\ -21 < 4x-9 < -13 \end{cases}$$

Sumando las dos últimas desigualdades, se sigue

$$-20<x^2+4x-9<-4 \Rightarrow |x^2+4x-9|<20$$

$$\Rightarrow |x+2||x^2+4x-9|<20|x+2|<\varepsilon, \text{ si } |x+2|<\frac{\varepsilon}{20}=\delta_2$$

3°) Por tanto, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\text{mín}\left\{\delta_1=1, \delta_2=\frac{\varepsilon}{20}\right\}$ tal que

$$0<|x+2|<\delta \Rightarrow |x^3+6x^2-x-19-(-1)|<\varepsilon$$

Ejemplo 10. Demuestre que $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5-3x}{5x+7}=4$.

Solución

1°) $\left|\dfrac{5-3x}{5x+7}-4\right| = \left|\dfrac{-23(x+1)}{5x+7}\right| = |x+1|\cdot\dfrac{23}{|5x+7|}$

2°) Para acotar $\dfrac{23}{|5x+7|}$ se debe tomar un $\delta_1<\dfrac{2}{5}$, porque $\dfrac{2}{5}$ es la distancia entre el punto de aproximación -1 y la asíntota vertical $x=-7/5$, de manera que la asíntota no esté en el intervalo $(-1-\delta_1; -1+\delta_1)$ (Fig. 3.4).

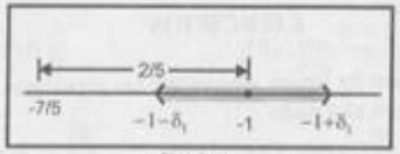


Fig. 3.4

Si $\delta_1=\dfrac{1}{5} \wedge 0<|x+1|<\dfrac{1}{5} \Rightarrow -\dfrac{6}{5}<x<-\dfrac{4}{5} \Rightarrow 1<5x+7<3$

$$\Rightarrow \frac{1}{|5x+7|}<1 \Rightarrow \frac{23|x+1|}{|5x+7|}<23|x+1|<\varepsilon, \text{ si } |x+1|<\frac{\varepsilon}{23}=\delta_2$$

3°) En consecuencia, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\text{mín}\left\{\delta_1=\frac{1}{5}, \delta_2=\frac{\varepsilon}{23}\right\}$ tal que

$$0<|x+1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{5-3x}{5x+7}-4\right| = \frac{23|x+1|}{|5x+7|}<\varepsilon$$

Ejemplo 11. Si $f(x)=\dfrac{1-|x|}{1+x}$, demuestre que $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}} f(x)=1$.

Solución

Dado $\varepsilon>0$, $|f(x)-1| = \left|\dfrac{1-|x|}{1+x}-1\right| = \left|\dfrac{-|x|-x}{1+x}\right| = \left|\dfrac{|x|+x}{1+x}\right|$

Se observa que existe un valor absoluto dentro del valor absoluto que nos impide simplificar. Como los valores de x son próximos a $-1/4$, tomando un δ lo suficientemente pequeño ($\delta \le 1/4$) para que $|x|=-x$ (Fig.3.5), se tiene:

$$|f(x)-1| = \left|\frac{|x|+x}{1+x}\right| = \left|\frac{-x+x}{1+x}\right| = 0<\varepsilon$$

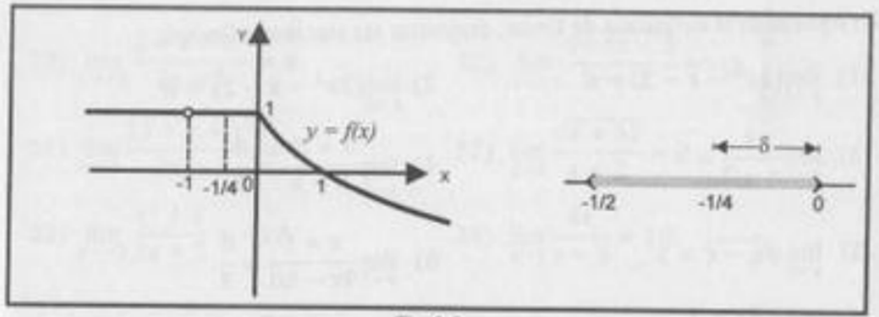


Fig. 3.5

Por tanto, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$, con $0<\delta\le\frac{1}{4}$ / $0<\left|x+\frac{1}{4}\right|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

I) Aplicando la definición de límite, demuestre los siguientes límites hallando el valor de δ ($\delta > 0$) para el ε dado.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(5x-3) = 12$, $\varepsilon = 0{,}03$ — R. $\delta \leq 0{,}006$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+5) = -1$, $\varepsilon = 0{,}012$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$, $\varepsilon = 0{,}004$ — R. $\delta \leq \varepsilon$

4) $\lim\limits_{x\to 3}(7x^2-20x+2) = 5$, $\varepsilon = 0{,}001$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1} = 4$, $\varepsilon = 0{,}015$ — R. $\delta \leq 0{,}005$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x-1} = 2$, $\varepsilon = 0{,}07$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$, $\varepsilon = 0{,}013$ — R. $\delta \leq 0{,}026$

8) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x-1}{3x^2-25} = -5$, $\varepsilon = 0{,}001$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{7x-13} = 4$, $\varepsilon = 0{,}01$

10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-14x}{10x-41} = -8$, $\varepsilon = 0{,}1$

II) Aplicando la definición de límite, demostrar los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x-2) = 8$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-x-2) = 8$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-2} = 4$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{3+2x}{5-x} = \dfrac{8}{9}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{6-x} = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x+1}{9x-60} = \dfrac{8}{3}$

7) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x-4}{5x+23} = -4$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = 2$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2-11}}{3} = \dfrac{1}{3}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = 2$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{64x-1} = 0$

13) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{3x}{x+8} = -21$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+1} = 2$

15) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x|}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|2-x|}{3x-1} = \dfrac{1}{2}$

17) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+3} = 1$

18) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{4+x}{x^2-9}} = \dfrac{3}{4}$

19) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{[\![x]\!]}{x+1} = 0$

20) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3x}{6x-5\pi} = 3$

21) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{3x^2+1}{x^4+1} = \dfrac{7}{5}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4x^2+1} = 1$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{63x-1} = 0$

24) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{[\![x]\!]+2}{x^2} = \dfrac{16}{25}$

25) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+1}{3x+2} = -5$

26) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{Sgn(x^2-1)}{x+4} = \dfrac{1}{7}$

27) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-15x-4}{x-3} = 0$

28) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{[\![x]\!]+x}{3+x-x^2} = 1$

29) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x+x^2}{2x+5} = 4$

30) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{-4x-3}}{x+2} = -3$

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{13+x+x^2}{2x+3} = 3$

32) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+62}}{x+2} = 2$

33) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+1}{2x+5} = -10$

34) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x}{x-3} = 10$

www.FreeLibros.com

3.3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Antes de dar las propiedades de los límites, se enunciará una propiedad de los números reales.

Proposición 1. Si $x \in \mathbb{R}_0^+$ es tal que $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

Demostración

Como $x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x > 0$. La posibilidad $x > 0$ no es posible porque, por hipótesis, $x < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. En particular, para $\varepsilon = x$ se cumpliría que $x < x$, lo cual es imposible. Luego, debe cumplirse $x = 0$.

Corolario. Si $|x| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$

Teorema 1 (Unicidad del límite) Si existe el límite de una función, entonces el límite es único, es decir, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ (cualquier número positivo). Será suficiente probar que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, porque, en virtud del corolario anterior, $L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$.

En efecto, por la definición de límite, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y}$$

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $0 < |x - a| < \delta$ se tiene:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, $L_1 = L_2$.

Teorema 2 (Conservación del signo) Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe una vecindad $B(a;\delta)$ tal que $\forall x \in B(a;\delta) \wedge x \neq a$, $f(x)$ y L tienen el mismo signo.

Demostración

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, para $0 < \varepsilon < |L|$, $\exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in B(a;\delta)$, $x \neq a$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon < |L|$, los números $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$ tienen el mismo signo de L (si $L > 0$, ambos son positivos y si $L < 0$, ambos son negativos), entonces $f(x)$ y L tienen el mismo signo.

Teorema 3 Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe una vecindad $B(a;\delta)$ y un número $M > 0$ tal que $f(x) < M$, $\forall x \in B(a;\delta)$, con $x \neq a$.

Demostración

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in B(a;\delta)$, $x \neq a$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Pero $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$, entonces $|f(x)| < |L| + \varepsilon$.

Por tanto, considerando $M = |L| + \varepsilon$, se tiene que $|f(x)| < M$, $\forall x \in B(a;\delta)$, con $x \neq a$.

Teorema 4 Si f y g son dos funciones tales que:

a) $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in B(a;r)$, con $x \neq a$

b) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$

Entonces, $L \leq M$, es decir, $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Demostración

Por el absurdo, supongamos que $L > M \Rightarrow L - M > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, para $\varepsilon = (L - M)/2$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, si $0 < |x - a| < \delta$, se verifica

$$M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon = L - \varepsilon < f(x) \Rightarrow g(x) < f(x)$$

Ello contradice el hecho de que $f(x) \leq g(x)$. Por lo tanto, $L \leq M$.

Teorema 5 (Teorema del sándwich) Sean f, g y h funciones tales que

a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in B(a,r)$, con $x \neq a$

b) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

Entonces, $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Demostración

Teniendo en cuenta b), para $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \;\; \ldots \;\; (1)$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \;\; \ldots \;\; (2)$$

www.FreeLibros.com

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, para $0 < |x - a| < \delta$ se cumple (1), (2) y la hipótesis a). Por lo tanto,

Si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$

$\Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

Ello demuestra que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Teorema 6 Sean f y g dos funciones tales que

a) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

b) $\exists\, M > 0$ tal que $|g(x)| < M, \forall\, x \in B(a;r)$, con $x \neq a$

Entonces, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$, de las hipótesis (a) y (b), existe una vecindad $B(a;\delta)$, con $0 < \delta \leq r$, tal que, $\forall\, x \in B(a;\delta)$, con $x \neq a \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

También se verifica

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)||g(x)| < |f(x)| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

En resumen, si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$.

Por lo tanto, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Ejemplo 12 Sean f y g dos funciones tales que

$$|f(x)| \leq |g(x)|,\ \forall\, x \in B(a;r) \text{ y } x \neq a.$$

Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, demuestre que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Solución

Previamente, dejamos al lector, verificar los siguientes resultados:

a) Si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ (Ejercicio 1(a))

b) Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$ (Ejercicio 1(c))

Como $0 \leq |f(x)| \leq |g(x)|$, $\forall\, x \in B(a;r)$ y $x \neq a$, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to a} 0 = 0 = \lim_{x \to a} |g(x)|,$$

entonces, por el teorema 5, $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$

Ejemplo 13. Supongamos que $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b y c constantes) es tal que $|ax^2 + bx + c| \leq |x^3|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $a = b = c = 0$.

Solución

Como $0 \leq |ax^2 + bx + c| \leq |x^3|$ y $\lim_{x \to 0} 0 = \lim_{x \to 0} |x^3| = 0$, entonces, por el teorema 5, se concluye que $\lim_{x \to 0} (ax^2 + bx + c) = c = 0$.

Reescribiendo (I) para $x \neq 0$, se tiene $0 \leq |b + ax| \leq |x|^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aplicando el razonamiento anterior (dos veces), se demuestra que $b = 0$ y $a = 0$.

3.3.1 PROPIEDADES OPERACIONALES DEL LÍMITE

Teorema 7. Sean f, g funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

i) $\lim_{x \to a} c = c$, c constante

ii) $\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = c\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = cL$, c constante

iii) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

iv) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

v) $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{1}{M}$, si $M \neq 0$

vi) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Demostración

Solo se demostrará algunas de estas propiedades.

iii) Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $0 < |x - a| < \delta$, se tiene

$$|[f(x) + g(x)] - [(L + M)]| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$.

www.FreeLibros.com

iv) Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, por el teorema 3, existen $\delta_1 > 0$ y $k > 0$ tales que

$$|g(x)| < k, \forall x \in B(a;\delta_1) \text{ y } x \neq a \quad \ldots \quad (I)$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de límite (suponiendo que $L \neq 0$), $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\exists\, \delta_3 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Para $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3\}$ y $0 < |x-a| < \delta$, se tiene

$$|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| = |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]|$$
$$\leq |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2k}\cdot k + |L|\frac{\varepsilon}{2|L|} = \varepsilon$$

En resumen, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - L.M| < \varepsilon$

En consecuencia, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$ (para $L \neq 0$).

Cuando $L = 0$, la demostración es evidente, porque $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y (I) son las son las hipótesis del teorema 6 y, en virtud a este teorema,

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0 = L\cdot M$$

Corolario 1. Si $\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$, $1 \leq i \leq n$, entonces

a) $\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

b) $\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)] = L_1\cdot L_2\cdot \ldots \cdot L_n$

Corolario 2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$ (si $n \leq 0$, L debe ser diferente de cero).

Corolario 3. Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes), entonces $\lim_{x\to b}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = a_0b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n$

Teorema 8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, donde $L \geq 0$ y n es cualquier entero positivo ó $L < 0$ y n es cualquier entero positivo impar.

Ejemplo 14. Halle $\lim_{x\to 2}\frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 10}$.

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 10} = \frac{\lim_{x\to 2}(5x^2 - 10x - 6)}{\lim_{x\to 2}(x^3 - 10)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Ejemplo 15. Calcule $\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^5 + 2}}$.

Solución

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^5 + 2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^5 + 2}} = \sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to -1}(3x^2 - 2x + 3)}{\lim_{x\to -1}(x^5 + 2)}} = \sqrt[3]{\frac{8}{1}} = 2$$

Observación 3

a) *Si al tratar de calcular* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, *se obtiene* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *(no es posible aplicar el teorema 7-vi), se dice que el límite es* ***indeterminado*** *(desconocido) y es de la forma 0/0. En este caso, se debe factorizar* $(x - a)$ *en el numerador y en el denominador, y luego simplificar el factor común para calcular el límite.*

b) *En general, las formas indeterminadas son:*

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0.\infty,\ 0^0,\ 1^\infty\ \text{y}\ (\infty)^0$$

c) *Para calcular un límite indeterminado se debe utilizar ciertos procesos o artificios que permitan eliminar la indeterminación, tal como veremos en los siguientes ejemplos.*

Ejemplo 16. Halle $\lim_{x\to 1}\frac{6x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

Solución

Este es un límite indeterminado de la forma 0/0. Por la observación 3-a), se debe factorizar $x - 2$ en el numerador y en el denominador. De esta manera, se tiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)}{(x-1)(x-2)} \underset{(*)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{6}{x-2} = -6$$

(La simplificación efectuada en (*) es válida porque al hallar $\lim_{x\to 1} f(x)$ se cumple que $x \neq 1$)

www.FreeLibros.com

Ejemplo 17. Halle $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$.

Solución

Después de escribir la diferencia como una sola fracción, se obtiene la forma indeterminada 0/0 y se debe factorizar $(x-2)$ en el numerador y en el denominador.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(2-x)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(2-x)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}-\frac{(x+4)}{x^2+2x+4}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$$

Ejemplo 18. Calcule $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{4-x}-1}$.

Solución

Este límite es de la forma $0/0$. Efectuando una doble racionalización se obtiene

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{4-x}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)(\sqrt{4-x}+1)}{(\sqrt{4-x}-1)(\sqrt{4-x}+1)(\sqrt{6+x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{(3-x)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}-\frac{\sqrt{4-x}+1}{\sqrt{6+x}+3}=-\frac{1}{3}$$

Observación 4. *Para la racionalización es necesario recordar que:*

i) $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Al factor $a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ *se le denomina* ***factor racionalizante.***

ii) $(a^n+b^n)=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, *si n es* impar

Al factor $a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}$ *se le denomina* ***factor racionalizante.***

Ejemplo 19 Halle $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}$

Solución

El límite es de la forma 0/0. Para conseguir el factor común $x-3$, se debe multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{3x}+3$ (factor racionalizante de $\sqrt{3x}-3$) y por $\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9$ (factor racionalizante de $\sqrt[3]{9x}-3$). De este modo, tenemos

www.FreeLibros.com

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt[3]{9x}-3)(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(9x-27)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3(\sqrt{3x}+3)}{\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9\right)}=\frac{2}{3}$$

Ejemplo 20. Halle $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. Al efectuar la racionalización, empleando la fórmula $a^4-b^4=(a-b)(b^3+a^2b+ab^2+b^3)$, donde $a=\sqrt[4]{(1+x^2)^2}=\sqrt{1+x^2}$ y $b=\sqrt[4]{1+x^4}$), se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{(1+x^2)^2}-\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^2-(1+x^4)}{x^2\left[\sqrt{(1+x^2)^3}+(1+x^2)\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^4}+\sqrt[4]{(1+x^4)^3}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\left[\sqrt{(1+x^2)^3}+\ldots+\sqrt[4]{(1+x^4)^3}\right]}=\frac{2}{1+1+1+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 21. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. En este ejemplo, en lugar de usar una doble racionalización (para simplificar el proceso) se hará un cambio de variable. Como $x+1$ aparece con los exponentes 1/3 y 1/4, reemplazamos $x+1$ por y^n, donde n es el mínimo común múltiplo de 3 y 4 (para eliminar los exponentes fraccionarios) y obtenemos

$$\text{m.c.m.}\{3;4\}=12 \implies x+1=y^{12}$$

Dado que $x\to 0\implies x+1\to 1\implies y^{12}\to 1\implies y\to 1$. Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{4}{3}$$

Ejemplo 22 Calcule $\lim_{x\to 4095}\frac{\sqrt{x+1}-4\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-8}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. Como 1/2, 1/3 y 1/4 son los exponentes de $x+1$, el cambio de variable es $x+1=y^{12}$, pues m.c.m{2, 3, 4} = 12. De este modo, si $x\to 4095 \Rightarrow x+1=y^{12}\to 4096=2^{12}\Rightarrow y\to 2$. Luego,

$$\lim_{x\to 4095}\frac{\sqrt{x+1}-4\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-8}=\lim_{y\to 2}\frac{y^6-4y^4}{y^3-8}=\lim_{y\to 2}\frac{y^4(y-2)(y+2)}{(y-2)(y^2+2y+4)}=\frac{16}{3}$$

Ejemplo 23. Calcule $\lim_{x\to 2}\frac{6\sqrt[3]{x+6}-4\sqrt{x+7}}{x^2-4}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. En este ejemplo mostraremos un artificio que permite resolver este tipo de límites. Se observa que cuando $x\to 2$, $6\sqrt[3]{x+6}$ y $4\sqrt{x+7}$ tienden a 12. Para transformar el límite en la suma de dos límites indeterminados de la forma 0/0, sumamos y restamos 12 en el numerador y luego agrupamos tal como se indica a continuación.

$$\lim_{x\to 2}\frac{6\sqrt[3]{x+6}-4\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(6\sqrt[3]{x+6}-12)+(12-4\sqrt{x+7})}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{6(\sqrt[3]{x+6}-2)}{x^2-4}+\frac{4(3-\sqrt{x+7})}{x^2-4}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)\left[\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]}+\frac{4(2-x)}{(x-2)(x+2)\left[3+\sqrt{x+7}\right]}\right\}$$

$$=\frac{6}{4(12)}-\frac{4}{4(6)}=-\frac{1}{24}$$

Ejemplo 24. Calcule $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}-4}{x-8}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. Utilizando el artificio indicado en el ejemplo anterior, separamos en dos sumandos manteniendo siempre la indeterminación. Así, se tiene

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}-4}{x-8}=\lim_{x\to 8}\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}+\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\right]$$

$$=\lim_{x\to 8}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)\left(2+\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}\right)}+\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}\right]=\frac{5}{48}$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 25. Calcule $L=\lim_{a\to b}\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}-2\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. En este ejemplo, la variable es a y las otras letras (b y x) son constantes. Procediendo como en el ejemplo anterior, separamos la expresión en dos sumandos de modo que permanezca la indeterminación.

$$L=\lim_{a\to b}\left[\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}+\frac{\sqrt{b+x}-\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}\right]$$

$$=\lim_{a\to b}\left[\frac{\frac{1}{2}(a-b)(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})}{(a-b)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}\right)}+\frac{\frac{1}{2}(b-a)(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})}{(a-b)\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}\right)}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{b+x}}{2\sqrt{b+x}}-\frac{2\sqrt{b+x}}{2\sqrt{b+x}}=0$$

Ejemplo 26 Halle $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. En este ejemplo podríamos trabajar como en el ejemplo anterior, pero es más favorable hacer el cambio de variable $x=y^{60}$, donde 60 = m.c.m{5, 4, 3}.

Como $x\to 1\Rightarrow y^{60}\to 1\Rightarrow y\to 1$, entonces

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}=\lim_{y\to 1}\frac{y^{24}-y^{20}}{1-y^{15}}=\lim_{y\to 1}\frac{y^{20}(y^4-1)}{(1-y^{15})}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^{20}(y-1)(1+y+y^2+y^3)}{(1-y)(1+y+y^2+\cdots..+y^{14})}=-\frac{4}{15}$$

EJERCICIOS

I) Demuestre las siguientes propiedades

1) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$

4) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$

II) Indique un ejemplo de modo que

1) Existe $\lim_{x \to a} |f(x)|$ y no existe $\lim_{x \to a} f(x)$

2) Existe $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ y no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$

III) En los siguientes ejercicios, si su respuesta es afirmativa, justifique; en caso contrario, indique un contraejemplo.

1) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$, ¿existe $\lim_{x \to a} g(x)$?

2) Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿existe $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$?

3) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)]$, ¿se sigue de ello que existe $\lim_{x \to a} g(x)$?

IV) Supóngase que existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) = g(x)$. Demuestre que si existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

V) Calcule los siguientes límites

1) $\lim_{x \to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 5, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ R. 2

2) $\lim_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5}{x}, & \text{si } x < 1{,}1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \geq 1{,}1 \end{cases}$ R. 6

3) $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$ R. 1

4) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 + 3x - 6}$ R. $-\dfrac{16}{9}$

5) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^6 - 1}$ R. $\dfrac{5}{6}$

6) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3}$ R. $\dfrac{7}{3} a^4$

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^{2n} + 1 - 3x^{-2n}}{3x^{2n} - 5 + 2x^{-2n}}$ R. 5

8) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a - 1)x - a}{x^2 - (a - 2)x - 2a}$ R. $\dfrac{a + 1}{a + 2}$

9) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$ R. $-\dfrac{3}{2}$

10) $\lim_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$ R. $-\dfrac{4}{3}$

11) $\lim_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$ R. $-\dfrac{1}{3}$

12) $\lim_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 4}{(x - 8)^2}$ R. $\dfrac{1}{144}$

13) $\lim_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ R. 3

14) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ R. $\dfrac{4}{3}$

15) $\lim_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$ R. $\dfrac{1}{48}$

16) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{5x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{\sqrt{x} - 3x + 2}$ R. $\dfrac{2}{15}$

17) $\lim_{x \to 5} \dfrac{2 - \sqrt{x - 1}}{1 - \sqrt[3]{3 - \sqrt{x - 1}}}$ R. -3

18) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{\sqrt{x + 7} - \sqrt{8}}$ R. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

www.FreeLibros.com

19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-10}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}$ R. $25\sqrt[5]{16}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$ R. $\dfrac{32}{27}$

21) $\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{2\sqrt[4]{x-4}-4}{\sqrt[5]{x+12}-2}$ R. 5

22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}$ R. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

23) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}$ R. $\dfrac{2}{3}$

24) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x-2}-4}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}$ R. $-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}}$

25) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{-9x}+1}-2}{2-\sqrt[3]{x+11}}$ R. 1

26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|}{|x-1|+|x-1|^2}$ R. 3

27) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x-3}-9}{\sqrt[3]{9-x\sqrt{4x-3}}}$ R. $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

28) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ R. 1

29) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ R. $\dfrac{11}{7}$

30) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}$ R. -12

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$, $a>0$ y $a\neq 1$ R. $\dfrac{1}{1-a^2}$

32) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{3x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}\right)$ R. $\dfrac{4}{9}$

www.FreeLibros.com

33) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{2x^2-ax-a^2}$, $a>0$ R. $\dfrac{2}{3}$

34) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x}$ R. $\dfrac{7}{3}$

35) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3+5x^2+3x-9}$ R. $\dfrac{3}{4}$

36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}$, $a>0,\ b>0$ R. $\dfrac{1}{2\sqrt{a+b}}$

37) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{b^2-x}-\sqrt{b^2-a}}{x-a}$ R. $-\dfrac{1}{2\sqrt{b^2-a}}$

38) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ R. $-\dfrac{1}{3}$

39) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$, $a>0$ R. $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$

40) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ R. $-\dfrac{1}{50}$

41) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$, $f(1-2x)=8x^2$ R. -8

42) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h^3+1}+\sqrt[5]{h^5+1}+h^2-2}{h-h\sqrt{h+1}}$ R. -2

43) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h^3+1}+\sqrt[5]{h^5+1}+h^3-2}{h-h\sqrt{h^2+1}}$ R. $-\dfrac{8}{3}$

44) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}-x\sqrt[3]{x+6}+x^2-2}{x^3-2x^2+x-2}$ R. $\dfrac{29}{30}$

45) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{-x+6}-3}{x^2-\sqrt{-x-2}-\sqrt[3]{x^2-1}+2x}$ R. $\dfrac{1}{18}$

46) $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2ax+a^2}+\sqrt[3]{x^3+\dfrac{a-b}{3}}-2x-b}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}$

R. $\dfrac{2\sqrt{b+x}(1+9x^2)}{9x^2}$

47) $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{\sqrt{x^2+\dfrac{a-b}{2}}-\sqrt[3]{x^3+\dfrac{b-a}{3}}}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{x+b}}$ R. $\dfrac{\sqrt[3]{(b+x)^2}(9x+4)}{12x^2}$

48) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right)$ R. $\dfrac{6m}{n}$

49) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\left(3-\sqrt{3\,Sgn(x^3+6)-2x}\right)\sqrt[3]{28\sqrt{x^2+13}-196}}{\sqrt[3]{x+6}\left(2-\sqrt[3]{4+\sqrt{|x-2|-4\left[\!\left[\frac{x}{4}\right]\!\right]}}\right)}$ R. $-64\sqrt[3]{3}$

50) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2+x+4}+\sqrt{x^2+5x+10}-6x^2}{\sqrt[3]{\sqrt{x+3}+6}+\sqrt{x+8}-5x^2}$ R. $\dfrac{506}{371}$

51) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt{x^4+9}-8}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+5}+9x+6}+\sqrt{x+2}-5}$ R. $\dfrac{2652}{29}$

52) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}-2\sqrt[3]{2x^2+2}+\sqrt[3]{4}}{(x-1)^2}$ R. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{9}$

53) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+4\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[12]{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{x-1}-3}$ R. $-\dfrac{3584}{4719}$

54) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[10]{x+1}+\sqrt[21]{x+1}-2}$ R. $-\dfrac{135}{43}$

55) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x^2+5}-x^2\sqrt[3]{x^3+3x^2+7}+4x-2}{2x-\sqrt{x^3+3x+2}}$ R. $-\dfrac{520}{9}$

56) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}-1}$ R. $\dfrac{27}{8}$

57) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|^3+|x+[\![x/8]\!]|-\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2+\sqrt[3]{9\sqrt[3]{7x-20}+5\,Sgn(x^3-8)}}$ R. $-\dfrac{235}{7}$

58) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|^2+26|x+3|-26\sqrt{\sqrt{3x}+33}}{4-2\sqrt[3]{\dfrac{x^2+15x-6}{x+3}}}$ R. -69

59) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{[\![1/5\sqrt[3]{100x+2\,Sgn(16-x^4)}]\!]+\sqrt[3]{x^2+2}-x+6}{\sqrt{x^2+\sqrt{-5x}+6}-6}$ R. $-\dfrac{136}{189}$

60) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^3-64)(\sqrt[63]{x-3}-1)(\sqrt[3]{3x-4}+\sqrt{x^2+9}-7)}{(2-\sqrt[3]{x+4})(\sqrt[21]{x-3}-1)(7-\sqrt{x^3-15})}$ R. $\dfrac{294}{5}$

61) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{[\![x/4]\!]+4x}-x^2+31}+\sqrt[3]{|3x-21|+5}-2}{\sqrt[3]{x^2-9\sqrt[3]{10x+4}}}$ R. $-\sqrt[5]{\dfrac{464}{405}}$

62) $\lim\limits_{x\to 20}\left(\dfrac{\sqrt{5x}-10}{2\sqrt{5}-\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{8x/5}}-2}{x^2-400}\right)$ R. $-\dfrac{\sqrt{5}}{400}$

63) Si $f(x)=\dfrac{x^2-mx+3x-3m}{x-m}$, halle los valores de m, de modo que $\lim\limits_{x\to m}f(x)=m^2-17$. R. $m=5$, $m=-4$

64) Si $f(x)=\dfrac{x^3-2a^2x+ax^2}{2ax+x^2}$ y $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2a-5$, halle el valor de a, sabiendo que $a>0$. R. $a=2$

65) Si $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{1-x^3}=4$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{1-x^2}=-6$, calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. R. -1

66) Si $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2}=8$ y $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x+2)}{x^2-4}=3$, calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. R. $1/3$

67) Si $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{f(a+x)}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}=12\sqrt{b+x}$ y $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{g(a+x)}{\sqrt[3]{b+x}-\sqrt[3]{a+x}}=9\sqrt[3]{(b+x)^2}$, halle $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(a+b+x)}{g(a+b+x)}$ R. -2

68) Si $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{ax^2+2x+b}=L\neq 0$, calcule el valor de $a+b$. R. -2

69) Si $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=L\neq 0$, halle $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$ R. $\dfrac{1}{2L}$

70) Sean $r_1<r_2$ las raíces de la ecuación $x^2-2px+q^2=0$, con $p,q\in\mathbb{R}^+$ y $p>q$. Calcule los límites:

a) $\lim\limits_{q\to p}\dfrac{r_2-r_1}{\sqrt{p-q}}$ R. $\sqrt{8p}$ b) $\lim\limits_{q\to p}\dfrac{pr_2-q^2}{pr_1-q^2}$ R. -1 c) $\lim\limits_{q\to p}\dfrac{pr_2-qr_1}{pr_1-qr_2}$ R. 1

www.FreeLibros.com

3.4 LÍMITES LATERALES

Cuando se calcula $\lim_{x \to a} f(x) = L$, el problema se reduce a encontrar el número L al cual se aproximan los valores de $f(x)$ cuando x tiende hacia a, tanto para valores menores que a (por la izquierda de a) como para valores mayores que a (por la derecha de a).

Consideremos la función $f(x) = Sgn(x)$ cuya gráfica se muestra en la figura 2.26 (Capítulo II). Se observa lo siguiente:

i) Si x se aproxima a 0 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a -1. En este caso, se dice que -1 es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a 0 por la izquierda, y se escribe $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

ii) Si x se aproxima a 0 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 1. En este caso, se dice que 1 es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende a cero por la derecha, y se escribe $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

En general, se tiene las siguientes definiciones:

Definición 3. Sea f una función definida en el intervalo $\langle a; c \rangle$, con $c > a$. Se dice que L es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha, y se denota por $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ ó $f(a^+) = L$ (Fig.3.6), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición 4. Sea f una función definida en el intervalo $\langle c; a \rangle$, con $c < a$. Se dice que M es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la izquierda, y se denota por $\lim_{x \to a^-} f(x) = M$ ó $f(a^-) = M$ (Fig.3.6), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$$

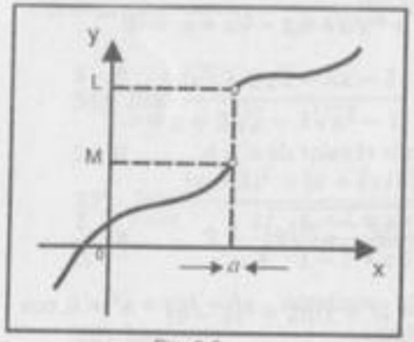


Fig. 3.6

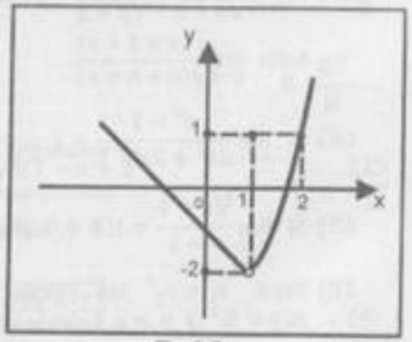


Fig. 3.7

www.FreeLibros.com

Para el siguiente teorema es requisito que sea factible el acercamiento hacia a por la derecha y por la izquierda.

Teorema 9. $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

En otras palabras, existe límite de una función si y solo si existen los límites laterales y son iguales.

Observación 5

1) En el caso de que es posible acercarse hacia a por la izquierda y por la derecha, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe:

i) Cuando uno de los límites laterales no existe ó

ii) Cuando los límites laterales existen y son diferentes.

2) Cuando la función tiene diferentes reglas de correspondencia para $x < a$ y para $x > a$, para hallar $\lim_{x \to a} f(x)$ es necesario calcular los correspondientes límites laterales.

Ejemplo 27. Sea $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{si } x > 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ -1 - x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$, calcule $\lim_{x \to 1} g(x)$, si existe, y trace su gráfica.

Solución

La función $g(x)$ tiene diferentes reglas de correspondencia para $x < 1$ y para $x > 1$. Por la observación 5, es necesario calcular los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (-1 - x) = -2 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3) = -2$$

Puesto que los dos límites laterales existen y son iguales, entonces $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$.

La gráfica de la función se muestra en la Fig. 3.7.

Ejemplo 28. Sea $h(x) = \dfrac{|x + 3|}{6 + 2x}$.

a) Halle $\lim_{x \to -3^-} h(x)$.

b) Halle $\lim_{x \to -3^+} h(x)$.

c) Trace la gráfica de $h(x)$.

Solución

Como $|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & \text{si } x \geq -3 \\ -(x + 3), & \text{si } x < -3 \end{cases}$, tenemos

a) $\lim_{x \to -3^-} h(x) = \lim_{x \to -3^-} \dfrac{-(x + 3)}{2(3 + x)} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{(x+3)}{2(3+x)} = \dfrac{1}{2}$

De a) y b), se concluye que no existe $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$ (los límites laterales son diferentes)

c) La gráfica de $h(x)$ se muestra en la fig. 3.8.

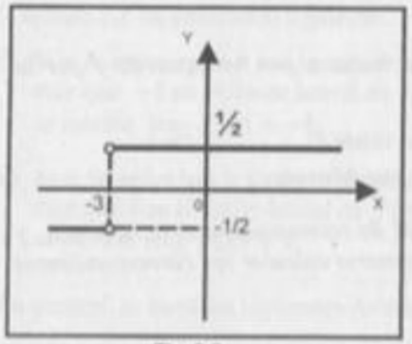


Fig. 3.8

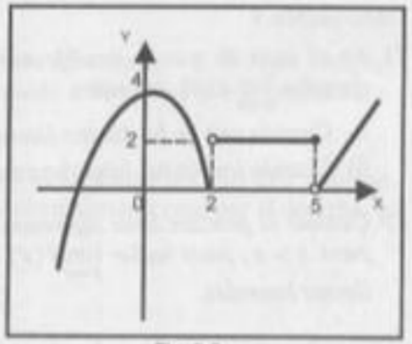


Fig. 3.9

Ejemplo 29. Sea $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 2 \\ 2, & 2 < x \le 5 \\ |x-5|, & x > 5 \end{cases}$

a) Trace la gráfica de $h(x)$

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 5} h(x)$, si existen.

Solución

a) La gráfica de $h(x)$ se muestra en la fig. 3.9.

b) Para calcular los dos límites, es necesario hallar los límites laterales en cada caso.

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (4 - x^2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 = 2$$

Como los límites laterales son diferentes, no existe $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

Análogamente,

$$\lim_{x\to 5^-} h(x) = \lim_{x\to 5^-} 2 = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+} h(x) = \lim_{x\to 5^+} |x-5| = 0$$

En conclusión, no existe $\lim\limits_{x\to 5} h(x)$, pues los límites laterales son diferentes.

Ejemplo 30. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{x+b}-\sqrt{x+c}}{\sqrt{x}}$, si $b, c > 0$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. Separando en dos sumandos y manteniendo la indeterminación, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{x+b}-\sqrt{x+c}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{x+c}}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-x\sqrt{x}}{x(\sqrt{b}+\sqrt{x+b})} + \frac{-x\sqrt{x}}{x(\sqrt{c}+\sqrt{x+c})}\right] = 0 + 0 = 0$$

Ejemplo 31. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4x^2} - 16}\right)$, si existe.

Solución

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sqrt{\frac{1}{4x^2} - 16} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2|x|}\sqrt{1-64x^2}$$

Puesto que $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \ge 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, calculando los límites laterales, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}\sqrt{1-64x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} -\frac{x}{2x}\sqrt{1-64x^2} = -\frac{1}{2}$$

Luego, no existe $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4x^2} - 16}$.

Ejemplo 32. En una circunferencia de radio 4, $l(d)$ y $L(d)$ son las longitudes de dos cuerdas que distan del centro d y $\frac{1}{2}(4+d)$ respectivamente, donde $0 < d < 4$. Halle $\lim\limits_{d\to 4^-}\dfrac{L(d)}{l(d)}$.

Solución

Una representación gráfica del problema es la que se muestra en la Fig. 3.10.

$$\frac{l(d)}{2} = \sqrt{16-d^2} \Rightarrow l(d) = 2\sqrt{16-d^2}$$

$$\frac{L(d)}{2} = \sqrt{16 - \frac{(4+d)^2}{4}} \Rightarrow L(d) = \sqrt{64-(4+d)^2}$$

www.FreeLibros.com

Luego, $\lim_{d\to 4^-} \frac{L(d)}{l(d)} = \lim_{d\to 4^-} \frac{\sqrt{64-(4+d)^2}}{2\sqrt{16-d^2}} = \lim_{d\to 4^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4-d)(d+12)}{(4-d)(d+4)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

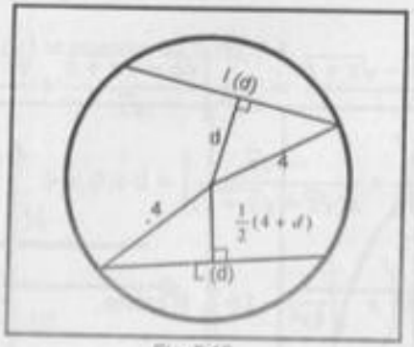


Fig. 3.10

EJERCICIOS

I) En los siguientes ejercicios, trace la gráfica de la función y halle el límite indicado (si existe).

1) $f(x) = \frac{x + |1-x|}{x^2+1}$

i) Halle $\lim_{x\to 0} f(x)$. R. 1

ii) Halle $\lim_{x\to 1} f(x)$. R. $\frac{1}{2}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & x > 2 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to 2} f(x)$. R. 4

3) $g(x) = \begin{cases} 3+x^2, & x < -2 \\ 0, & x = -2 \\ 11-x^2, & x > -2 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to -2} g(x)$. R. 7

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, & \text{si } x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to 3} f(x)$. R. ∄

5) $g(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & x \ge 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, & x < 5 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to 5} g(x)$.

6) $h(x) = \begin{cases} 6x-x^2, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 2x^2-x-3, & x > 2 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to 2} h(x)$.

7) $h(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ |x-3|, & x > 2 \end{cases}$. Halle $\lim_{x\to 1} h(x)$ y $\lim_{x\to 2} h(x)$.

II) En los siguientes ejercicios, halle el límite indicado, si existe.

1) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt[36]{x-1} - \sqrt[9]{x-1}}{3x^2-3+\sqrt[36]{x-1}}\right)\left(\frac{x^{3/2}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\lim_{x\to \frac{2}{3}} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4}$ R. ∄

4) $\lim_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4}$ R. $\frac{\sqrt{54}}{2}$

5) $\lim_{x\to 0} \sqrt{[\![9+x^2]\!]}$ R. 3

6) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+3x-3}{|x-1|}$ R. ∄

7) $\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right|$ R. 4

8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|}$ R. 0

9) $\lim_{x\to \sqrt{2}^-} \frac{2[\![x^2+1]\!] + |x+2| - 2}{[\![3x+2]\!]}$ R. $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$

www.FreeLibros.com

10) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} [x^2 - Sgn(|x^2-1|-1)]$ R. 1

11) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} [x^4 - Sgn(|x^2-1|-1)]$ R. 5

12) $\lim\limits_{x\to 0} [3x + Sgn(|x^2-1|-1)]$ R. 0

13) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} [x^2 + 5 + Sgn(|x^2-1|-1)]$ R. $\nexists$

14) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - [\![\frac{x}{3}]\!]}{[\![2x]\!] + 10}$ R. $\nexists$

15) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}} \dfrac{12 - [\![x/3]\!]}{[\![3x]\!] - 10}$ R. $-\dfrac{6}{5}$

16) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5\sqrt[5]{x-2} + 3\sqrt[3]{2-x} + 2\sqrt{2x-1} + 6x^2 - 6}{x^2 - x}$ R. 14

17) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{5\sqrt[5]{x+2} - 4\sqrt[4]{-1-2x} + 3\sqrt{2+x} - 2\sqrt{-1-2x} + 5x + 3}{x^2 + x}$ R. -11

18) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} - 3x}{(x-1)^2}$ R. $\dfrac{1}{9}$

19) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{-9x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x+1}$ R. $-\dfrac{7}{6}$

20) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{\frac{[\![x^3]\!]}{3} - \frac{3[\![x]\!]}{2}} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{9\,Sgn(x-1) - x^2}}$ R. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

www.FreeLibros.com

3.5 LÍMITES AL INFINITO

Definición 5. Sea $f:\langle a;+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0 \;/\; x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{(Fig. 3.11)}$$

Definición 6 Sea $g:\langle -\infty; a\rangle \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, se dice que L es el límite de $g(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = L$, si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M > 0 \;/\; x < -M \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{(Fig. 3.12)}$$

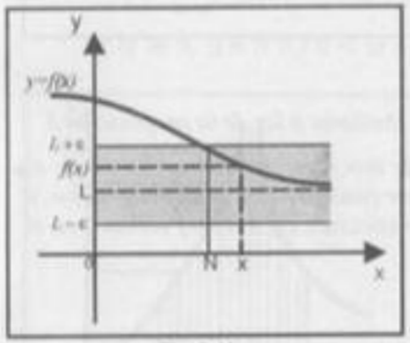


Fig. 3.11

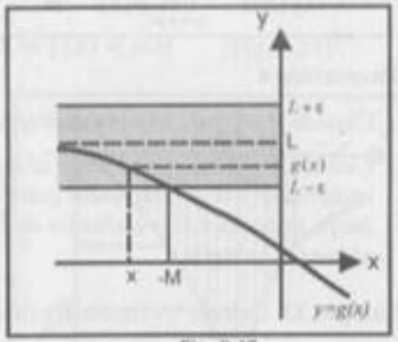


Fig. 3.12

La definición 5 tiene la siguiente interpretación: cuanto más grande es el valor de x, la diferencia entre $f(x)$ y L es cada vez más pequeña En otras palabras, $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aleja hacia la derecha (ver fig. 3.11).

En el caso de la definición 6, $g(x)$ se aproxima a L cuando x se aleja hacia la izquierda (ver fig. 3.12).

Proposición 2. Si n es un entero positivo cualquiera, entonces

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Demostración

i) Demostremos para el caso $n = 2$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0 \;/\; x > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x^2} - 0\right| = \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{N^2} = \varepsilon$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Proposición 3. Sean f y g funciones definidas en $\langle a;+\infty)$ y $\langle b;+\infty)$, respectivamente. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = M$, entonces

a) $\lim_{x\to+\infty} [c\,f(x)] = c \lim_{x\to+\infty} f(x) = c\,L$, c es constante

b) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x) = L \pm M$

c) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x) = LM$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Observación 6

1) Cuando $x \to -\infty$, se obtiene propiedades similares a las de la proposición 3.

2) Cuando se calcula los límites al infinito de una función racional, se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x del denominador, y luego se aplican los resultados de las proposiciones 2 y 3, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 33 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+2x-3}$ b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{9-7x+12x^4}{4+5x^6}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{9x+4}{7-5x}$

Solución

a) Teniendo en cuenta lo indicado en la observación 6, dividimos el numerador y el denominador entre x^2 (la mayor potencia del denominador). De este modo, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-6x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3-0+0}{1+0-0} = 3$$

b) En este caso, dividiendo el numerador y el denominador entre x^6 obtenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{9-7x+12x^4}{4+5x^6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{9}{x^6}-\frac{7}{x^5}+\frac{12}{x^2}}{\frac{4}{x^6}+5} = \frac{0-0+0}{0+5} = 0$$

c) Dividiendo el numerador y el denominador entre x, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{9x+4}{7-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9+\frac{4}{x}}{7-\frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(9+\frac{4}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(7-\frac{5}{x}\right)} = \frac{9+0}{7-0} = \frac{9}{7}$$

3.6 LÍMITES INFINITOS

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al número a (a puede o no estar en el dominio de f).

Definición 7. Se dice que el límite de $f(x)$ es $+\infty$ cuando x tiende al punto a, y se denota por $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall K \gg 0,\ \exists\,\delta > 0 \ /\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K \qquad \text{(Fig. 3.13)}$$

Definición 8. Se dice que el límite de $f(x)$ es $-\infty$ cuando x tiende al punto a, y se denota por $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M \gg 0,\ \exists\,\delta > 0 \ /\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \qquad \text{(Fig. 3.14)}$$

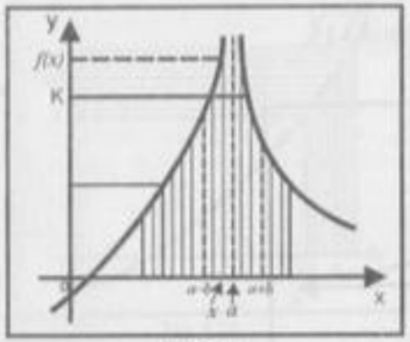


Fig. 3.13

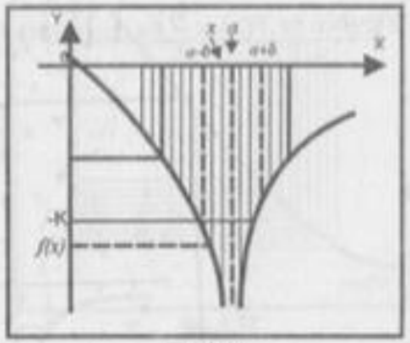


Fig. 3.14

En el caso de los límites infinitos, también se define los siguientes límites laterales:

a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Observación 7

1) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, significa que los valores $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes (o $f(x)$ crece sin límite) cuando los valores de x se aproximan hacia a.

2) Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, significa que los valores $f(x)$ se hacen arbitrariamente "infinitamente negativos" (o $f(x)$ decrece sin límite) cuando los valores x se aproximan hacia a.

3) En el caso de los límites laterales, solo hay que agregar que la aproximación hacia a solo es por un lado.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 34 Pruebe que

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Solución

a) Dado $k > 0$, $\exists\, \delta = \frac{1}{k} > 0 \;/\; 0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = k$

Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

b) Dado $k > 0$, $\exists\, \delta = \frac{1}{k} > 0 \;/\; -\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -k$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

El gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ se representa en la figura 3.15.

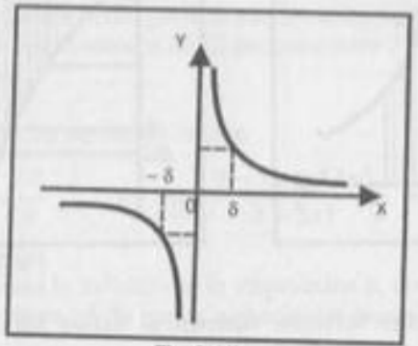


Fig. 3.15

Proposición 4. Si n es un entero positivo, entonces:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \\ +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Como casos particulares de esta proposición podemos indicar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^8} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$

www.FreeLibros.com

Definición 9. Sea f una función cuyo dominio es D. El conjunto D en a) y en b) contiene a un intervalo de la forma $\langle a; +\infty)$; en c) y en d) contiene a un intervalo de la forma $(-\infty; a\rangle$. Con estas condiciones se define:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, K \gg 0, \exists\, M > 0 \;/\; x > M \Rightarrow f(x) > K$ (Fig. 3.16)

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, K \gg 0, \exists\, M > 0 \;/\; x > M \Rightarrow f(x) < -K$ (Fig. 3.17)

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, K \gg 0, \exists\, M > 0 / \; x < -M \Rightarrow f(x) > K$ (Fig. 3.18)

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, K \gg 0, \exists\, M > 0 / \; x < -M \Rightarrow f(x) < -K$ (Fig. 3.19)

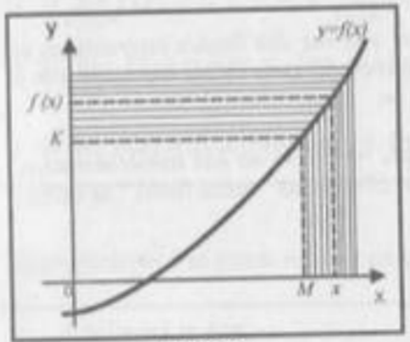


Fig. 3.16

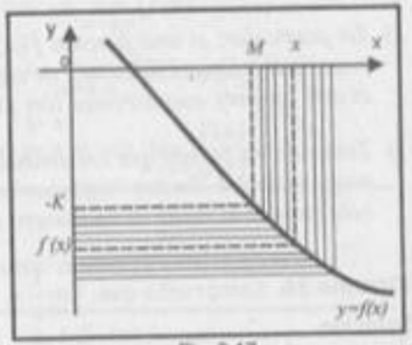


Fig. 3.17

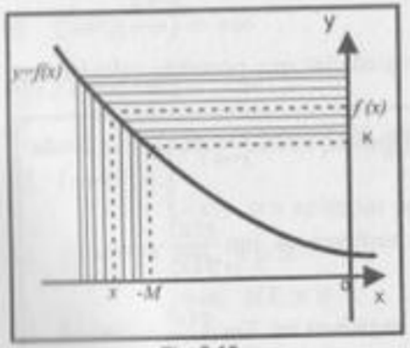


Fig. 3.18

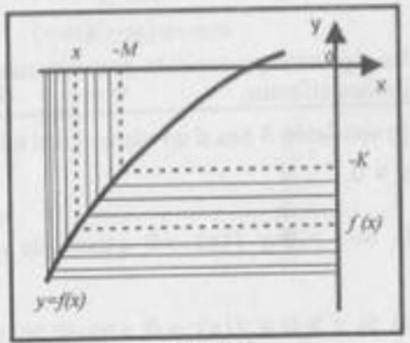


Fig. 3.19

La definición 9(a) significa que para los valores de x bastante grandes (positivos), los valores correspondientes a $f(x)$ también se hacen bastante grandes (positivos).

Las otras definiciones pueden ser interpretadas fácilmente.

Ejemplo 35. Pruebe que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Solución

Sea $K \gg 0$, para $M = K$ se tiene que si $x > M \Rightarrow x > K$. Luego, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

En forma análoga, dado $K \gg 0$, $\exists\, M = K \,/\, x < -M \Rightarrow x < -K$.

Por tanto, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Observación 8

1) En lo que sigue, se escribirá $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *si* $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$. *Esto significa que el valor absoluto de* $f(x)$ *supera a cualquier* $K > 0$, *cuando* x *se aproxima hacia* a.

2) En particular, si una función $f(x)$ *es tal que sus dos límites laterales en el punto* a *son límites infinitos "de signos diferentes" (uno de los límites es* $+\infty$ *y el otro es* $-\infty$*), escribiremos* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

3) Teniendo en cuenta que los símbolos $+\infty$, $-\infty$ *y* ∞ *no son números reales, ninguno de los límites "infinitos" existen. El término "existe límite" se utiliza solo cuando el límite es un número real.*

Ejemplo 36. Compruebe que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Solución

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

La siguiente proposición presenta cuatro propiedades que permiten calcular los límites infinitos.

> **Proposición 5** Sea a un número real tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde $c \neq 0$.
>
> i) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.
>
> ii) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
>
> iii) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
>
> iv) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

www.FreeLibros.com

En la siguiente proposición se presentan otras propiedades que se utilizarán para calcular los límites infinitos.

> **Proposición 6.** Sean f y g dos funciones.
>
> a) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = \pm\infty \wedge \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \pm\infty$.
>
> b) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$.
>
> c) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $L > 0$, y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \pm\infty$.
>
> d) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $L < 0$, y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \mp\infty$.
>
> e) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \mp\infty$.
>
> f) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, L constante, y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

La proposición 6 se puede resumir en el siguiente cuadro (k es constante):

i) $k + (+\infty) = +\infty$	ii) $k + (-\infty) = -\infty$
iii) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	iv) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
v) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$	vi) $(-\infty)(-\infty) = +\infty$
vii) $(+\infty)(-\infty) = -\infty$	viii) $\frac{k}{\pm\infty} = 0$

ix) $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par positivo} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar positivo} \end{cases}$

x) $(+\infty)^n = +\infty$, $n \in \mathbb{Z}^+$

xi) $k(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } k > 0 \\ -\infty, & \text{si } k < 0 \end{cases}$

xii) $k(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } k > 0 \\ +\infty, & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Ejemplo 37. Calcule $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to1} f(x)$, si $f(x) = \frac{3x^3+1}{2-x-x^2}$.

Solución

Al evaluar $f(x)$ en $x = 1$, se observa que tiene la forma 4/0 (el límite del numerador es 4 y el límite del denominador es 0). Aplicando la proposición 5, se puede concluir que los tres límites son infinitos. Para determinar el signo de infinito ($+\infty$ ó $-\infty$), factorizamos el denominador para determinar si se acerca a 0 por valores positivos o por valores negativos. De este modo, tenemos

i) $\lim_{x\to1} (3x^3 + 1) = 4 > 0$

ii) $\lim_{x\to1} (2 - x - x^2) = \lim_{x\to1}(1 - x)(x + 2) = 0$

Para $x < 1$ (muy próximo a 1): $1 - x > 0$ y $x + 2 > 0$, entonces

$\lim_{x\to1^-} (1 - x)(x + 2) = 0^+$ (se aproxima a cero a través de valores positivos)

Para $x > 1$ (muy próximo a 1): $1 - x < 0$ y $2 + x > 0$, entonces

$\lim_{x\to1^-} (1 - x)(x + 2) = 0^+$ (se aproxima a cero a través de valores positivos)

Entonces:

a) $\lim_{x\to1^-} \frac{3x^3+1}{(1-x)(2+x)} \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty$

b) $\lim_{x\to1^+} \frac{3x^3+1}{(1-x)(2+x)} \left(\frac{4}{0^-}\right) = -\infty$

c) De a) y b), se concluye que $\lim_{x\to1} \frac{3x^3+1}{2-x-x^2} = \infty$

Ejemplo 38. Halle

a) $\lim_{x\to-3^-} \frac{3x+1}{x^2-x-6}$ b) $\lim_{x\to4^+} \frac{\sqrt[3]{15-x^2}}{x-4}$

Solución

a) El límite es de la forma 10/0. Aplicando el método anterior, se tiene

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{3x+1}{x^2-x-6} = \lim_{x\to-3^-} \frac{3x+1}{(x-3)(x+2)} \left(\frac{10}{0^-}\right) = -\infty$$

b) El límite es de la forma $-1/0$. Utilizando el argumento anterior, obtenemos

$$\lim_{x\to4^+} \frac{\sqrt[3]{15-x^2}}{x-4} \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty$$

www.FreeLibros.com

En la siguiente observación se mencionan dos propiedades que son importantes en el cálculo de límites.

Observación 9.

Si $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ *es un polinomio de grado* n *y* $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ *es un polinomio de grado m, entonces*

1) $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$

2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \infty, & \text{si } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n < m \end{cases}$

La verificación de 1) es fácil, porque

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

Análogamente, se verifica 2). En efecto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \begin{cases} \infty, & \text{si } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n < m \end{cases}$$

Ejemplo 39. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} (13 + 8x + 10x^2 - 2x^3)$ b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3-5x^2+x-3}{6x^2+4x+50}$

Solución

Aplicando los resultados de la observación 9, se tiene

a) $\lim_{x\to+\infty} (13 + 8x + 10x^2 - 2x^3) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3-5x^2+x-3}{50-4x-6x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{-6x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{3} = -\frac{-\infty}{3} = +\infty$

Ejemplo 40. Halle $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x-3}{10x^2-5}$.

Solución

El límite es de la forma ∞/∞. Se puede aplicar el método de dividir el numerador y denominador entre x^2 (la mayor potencia del denominador) ó el método del ejemplo anterior. Aplicando el primero, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x-3}{10x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}}{10 - \frac{5}{x^2}} = \frac{+\infty}{10} = +\infty$$

Ejemplo 41. Halle $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^4-2x^3+4x^2-101}{5x^2-3x+2}$.

Solución

El límite es de la forma ∞/∞. Aplicamos el método de la observación 9.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^4-2x^3+4x^2-101}{5x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^4}{5x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{5} = \frac{+\infty}{5} = +\infty$$

Ejemplo 42. Calcule $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$.

Solución

Este límite es de la forma 0/0. Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{16-x^2}$, se obtiene

$$\lim_{x\to4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = \lim_{x\to4^-} \frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}} = \lim_{x\to4^-} \frac{-(x+4)}{\sqrt{16-x^2}}\left(\frac{-8}{0^+}\right) = -\infty$$

Ejemplo 43. Halle $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+5}$.

Solución

Este límite es de la forma ∞/∞. La mayor potencia del denominador es x. Dividiendo numerador y denominador entre $x = \sqrt{x^2}$ $(x > 0)$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x+5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{8}{x^2}}}{1+\dfrac{5}{x}} = 1$$

Ejemplo 44. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+5}$.

Solución

El límite es de la forma ∞/∞. Como en el ejemplo anterior, dividimos el numerador y el denominador entre $x = -\sqrt{x^2}$ $(x < 0)$. De este modo, resulta

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{-\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x+5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{8}{x^2}}}{1+\dfrac{5}{x}} = -1$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 45. Halle

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)$

Solución

a) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x) = (+\infty)-(-\infty) = +\infty$$

b) El límite es de la forma $(\infty)-(\infty)$. Para transformar a un cociente, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{x^2-2x}+x$. Así, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1} = -1$$

Ejemplo 46. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6-8}-x^3)$.

Solución

Este límite es de la forma $\infty-\infty$. Para aplicar el método utilizado en el ejemplo anterior, es necesario racionalizar la función. De este modo, tenemos

$$\sqrt{x^6-8}-x^3 = \frac{(\sqrt{x^6-8}-x^3)(\sqrt{x^6-8}+x^3)}{\sqrt{x^6-8}+x^3} = \frac{-8}{\sqrt{x^6-8}+x^3} \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^6-8}-x^3\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{8}{\sqrt{x^6-8}+x^3} = 0$$

(Dividiendo numerador y denominador entre x^3)

Ejemplo 47. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\,x)$, $a > 0$.

Solución

Este límite es de la forma $\infty-\infty$. Aplicamos el método del ejemplo anterior.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\,x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

(Dividiendo numerador y denominador entre x)

Ejemplo 48 ¿Existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x^6+1}$?

Solución

El dominio de la función es $[-2;2]$, lo que significa que x no puede tomar valores positivos muy grandes y, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x^6+1}$.

Ejemplo 49. Calcule $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[7]{\dfrac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+3)}{x-128x^2}}$.

Solución

Dentro del radical, el límite es de la forma ∞/∞. Dividiendo entre x^2 el numerador y el denominador (dentro de radical) y agrupando convenientemente, se obtiene

$$L = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{\frac{(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\frac{(\sqrt{x^3}+3)}{\sqrt{x^3}}}{x-128x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\left(1+\frac{3}{\sqrt{x^3}}\right)}{\frac{1}{x}-128}} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 50 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+5x+2}{x^2+4x+6}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-50}\right)$

Solución

a) El límite es de la forma $\infty-\infty$. Racionalizando, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} = \frac{2}{3}$$

(Dividiendo numerador y denominador entre x^2)

b) El límite es de la forma $\infty-\infty$. En este caso, usamos el artificio de sumar y restar x para trabajar con dos límites de forma $\infty-\infty$, para luego trabajar con los métodos anteriores.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+5x+2}{x^2+4x+6}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-50}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^3+3x^2+5x+2}{x^2+4x+6}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2-50}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-x^2-x+2}{x^2+4x+6}\right)+\frac{50-2x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2-50}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2-50)^2}}\right]$$

$$= -1-\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

I. Calcule los siguientes límites al infinito.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-5}{x+2-8x^3}$ R. $-\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-5}{x+2-8x^3}$ R. 0

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ R. 2

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-2}{2x+1}\div\dfrac{x^2-4x}{x-3}\right)$ R. $\dfrac{3}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-x}{x^2}$ R. 0

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$ R. 0

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)$ R. 1

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{x^3}}$ R. 0

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$ R. $-5/2$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)$ R. $\sqrt{2}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right)$ R. $(a+b)/2$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x+6}-\sqrt{16x^2-8x-6}\right)$ R. 2

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ R. 0

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+15x^3-2x+1}-2x\right)$ R. $\dfrac{15}{32}$

17) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+4)!\,3}{(n+4)!}$ R. -3

18) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ R. $\dfrac{1}{2}$

19) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$ R. $\dfrac{1}{3}$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+x+1}}$ R. 1

21) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{\dfrac{(5-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}{243x-11}}$ R. $-\dfrac{1}{3}$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x-2}+5\sqrt[3]{3x+4}}{2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{2x+5}}$ R. 0

23) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9}\right]$ R. 1/2

24) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+5}\right]$ R. $-1/2$

25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x}}}-2\sqrt{x}\right)$ R. 1/2

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x^2+\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x}}}}-2\sqrt[3]{x}\right).$ R. 1/6

27) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}-\sqrt[3]{x^2}\right)$ R. 1

28) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)$ R. $-4/3$

29) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[4]{x^4-x^3+1}\right)$ R. $-2/15$

30) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\sqrt{x^2-3}(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x\sqrt[3]{x^3+1}}\right]$ R. 1

31) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt[4]{x^8+x^4+1}\right)$ R. 1/4

www.FreeLibros.com

32) $\lim\limits_{a\to+\infty} \left(\sqrt{a^2x^2+\dfrac{a-b}{2}}-\sqrt[3]{a^3x^3+\dfrac{b^2-a^2}{2}}\right)$ R. $\dfrac{9x+4}{36x^2}$

33) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{8x^6+3x^4+5x^2-8}-\sqrt[4]{x^8+5x^6+1}-\sqrt{x^4+6x^2-1}\right)$ R. -4

34) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+6x^2-16}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-x}}$ R. $\dfrac{4}{3}$

35) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^9+3x^4+1}+\sqrt[5]{x^{10}+x^2+1}+10}{\sqrt[4]{x^4+x^2+1}+\sqrt[4]{x^{12}+x^2+1}-10}$ R. 2

36) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x+a)}-x}{x-\sqrt[3]{x^3+x^2+5[\![1/x]\!]}}$ R. $-\dfrac{3a}{2}$

37) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x^3+5}+4x^2+6}-2x}{x-\sqrt[3]{x^3+12x^2+1}}$ R. $-\dfrac{1}{16}$

38) $\lim\limits_{a\to+\infty} \left[\sqrt{a+a^2x^2}+\sqrt{b+a^2x^2}-2\sqrt{a^2x^2+\frac{a+b}{2}}\right]$ R. 0

39) $\lim\limits_{a\to-\infty} \left[\sqrt[3]{a^2+a^3x^3}+\sqrt[3]{b^2+a^3x^3}-2\sqrt[3]{a^3x^3-\frac{a^2+b^2}{3}}\right]$ R. $5/9x^2$

40) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\sqrt[3]{8+[\![\frac{1}{x^3}]\!]}+\sqrt[3]{32+[\![\frac{1}{x^5}]\!]}\right)-\sqrt[3]{64x^3+24x^2+3}\right]$ R. $-1/2$

41) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^5+x+1}+\sqrt[4]{x^4-13x^2+36}}{\sqrt[3]{x^3+3x+4}+\sqrt{4x^2-x^4}}$ R. $\nexists$

42) $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{\sqrt[7]{a^7x^7+a}+\sqrt{a^2-4}}{\sqrt[5]{a-1-a^5x^5}+\sqrt[4]{a^4-25a^2+144}}$ R. $\dfrac{1+x}{1-x}$

43) Halle el mayor valor de c de modo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{cx^{c-1}+2x^c}{\sqrt{3x^2+1}}$ sea finito y calcule el límite. R. $c=1$, $L=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

II. En los siguientes ejercicios, calcule los límites infinitos.

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ R. $+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ R. $+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$ R. $-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3x^2-7x+6}{x^2+x-6}$ R. $-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-4}\right)$ R. ∞

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-1}$ R. ∞

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^2-3x+5}$ R. $-\infty$

8) $\lim\limits_{x\to 20^+} \dfrac{5x^3+1}{20x^3-8000x}$ R. $+\infty$

III. En los siguientes ejercicios, calcule el límite indicado.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x^2-2x-1}\right]$ R. $+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^{7/6}+x^{1/3}}{5x^{4/3}+x^{1/4}}$ R. 0

3) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+2h+4}+\sqrt[3]{h^3+3h^2+3h-8}+6h}{h\sqrt{h+1}-h}$ R. $+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^6-3x^3}}\right)$ R. $+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2)$ R. $-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} 4(x\sqrt{x^2+1}-x^2)$ R. 2

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{30+2x+5x^2-x^3})$ R. $+\infty$

8) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}$ R. 0

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{12x^3+6x^2-3}{2x^2+7} + \sqrt[3]{x^3+3x^2+1} - 7x\right]$ R. 4

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^3+1}{x^2+1} + \sqrt{x^2+2} - 2x\right]$ R. 0

IV. Sea C_1 un círculo de radio r, T_1 el triángulo equilátero inscrito en C_1, C_2 el círculo inscrito en T_1, T_2 el triángulo equilátero inscrito en C_2, y así sucesivamente. Así, T_n es el triángulo equilátero inscrito en C_n. Si A_n es la suma de las áreas de los triángulos $T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n$ y B_n es la suma de las áreas de los círculos $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, halle $\lim\limits_{n\to +\infty} A_n$ y $\lim\limits_{n\to +\infty} B_n$.

V. Si en el ejercicio IV T_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ representa el cuadrado inscrito en C_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, hallar $\lim\limits_{n\to +\infty} A_n$.

VI. En los siguientes ejercicios, halle las constantes a y b tales que:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) = 0$

www.FreeLibros.com

3.7 ASÍNTOTAS

Consideremos una curva cualquiera y un punto A que se mueve a lo largo de la curva. Se dice que **el punto A tiende al infinito** si la distancia entre A y el origen de coordenadas tiende al infinito (crece sin límite).

Definición 10. Se dice que la recta L es **asíntota** de la curva C si la distancia entre la recta L y un punto A, que se mueve a lo largo de la curva, tiende a cero cuando A tiende al infinito, esto es, $\lim\limits_{A\to\infty} d(A, L) = 0$ (Fig. 3.20).

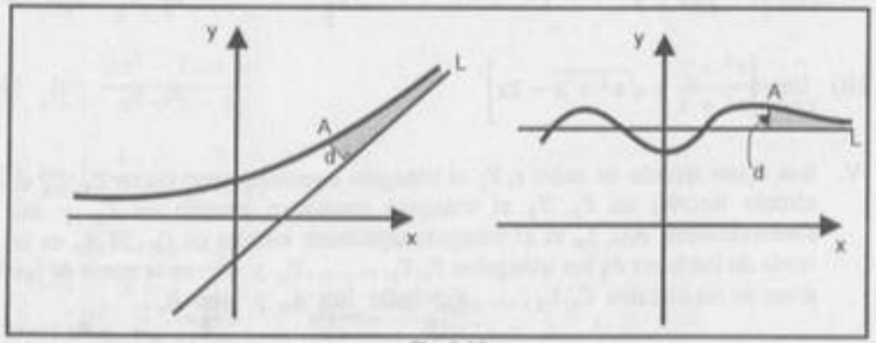


Fig. 3.20

Proposición 7. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (Fig. 3.21)

b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (Fig. 3.22)

c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ (Fig. 3.23)

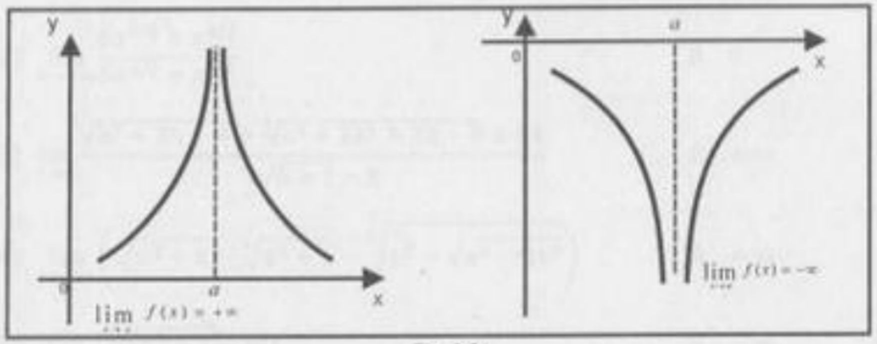


Fig. 3.21

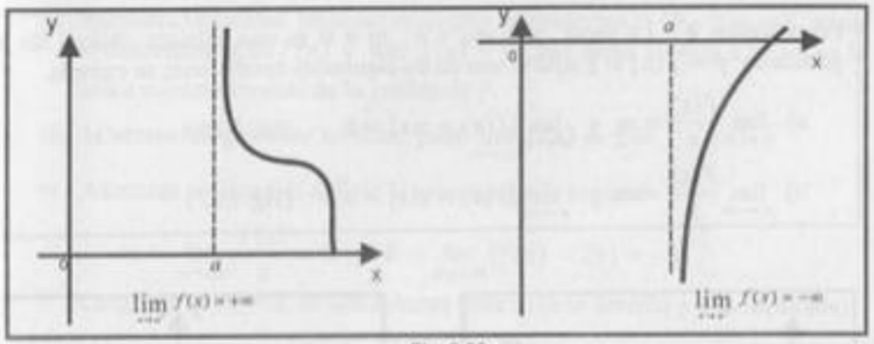


Fig. 3.22

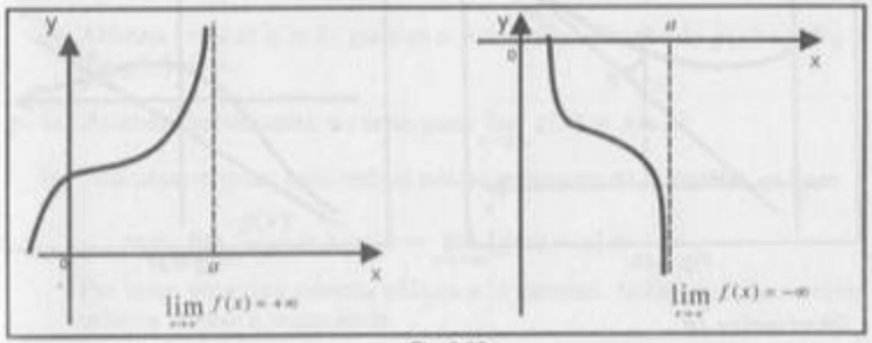


Fig. 3.23

Proposición 8. La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ (Fig. 3.24)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ (Fig. 3.25)

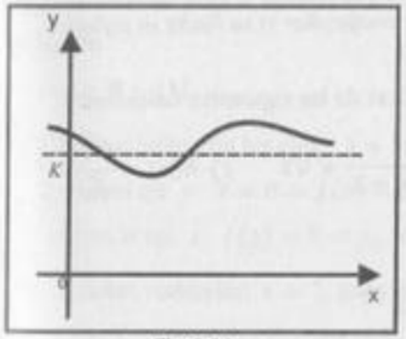


Fig. 3.24

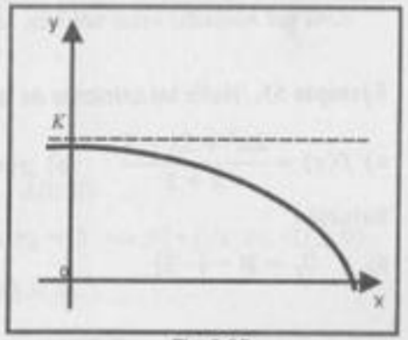


Fig. 3.25

www.FreeLibros.com

Proposición 9 La recta $y = mx + b$, $m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $y = f(x)$ si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b$ (Fig. 3.26)

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = b$ (Fig. 3.27)

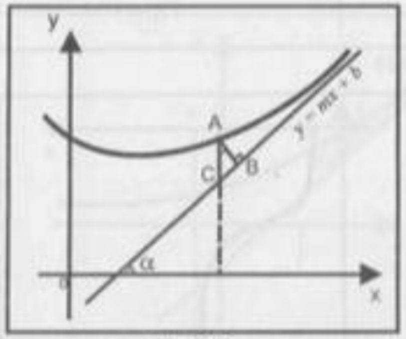


Fig. 3.26

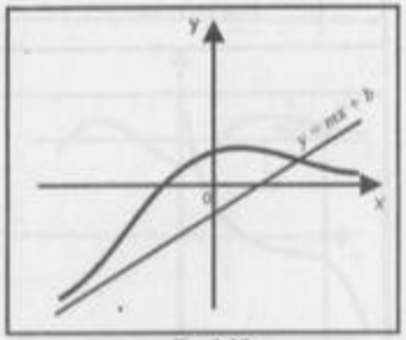


Fig. 3.27

Observación 10

1) Respecto a la proposición 9, es necesario tener en cuenta:

i) *Si al calcular los valores de m y b (cuando $x \to +\infty$), uno de los dos límites no existe, la curva no presenta asíntota oblicua a la derecha. Resultado similar se obtiene cuando $x \to -\infty$.*

ii) *Si $m = 0$ y b es finito, la asíntota es horizontal.*

2) Si una función $f(x)$ tiene la forma de una fracción, las posibles asíntotas verticales se obtienen en los valores de x que anulan al denominador de $f(x)$. Una vez hallados estos valores, se debe comprobar si su límite es infinito.

Ejemplo 51. Halle las asíntotas de las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3}$ b) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} + \sqrt[3]{x}$ c) $h(x) = \frac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{x} - 2}$

Solución

a) i. $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

www.FreeLibros.com

ii. Asíntotas verticales: teniendo en cuenta la observación 10, $x = -3$ anula el denominador de $f(x)$ y $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$. Por tanto, la recta $x = -3$ es la única asíntota vertical de la gráfica de f.

iii. Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

iv. Asíntotas oblicuas: al aplicar la proposición 8, se tiene

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \ \text{ y } \ b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = -1$$

Luego, $y = 2x - 1$ es una asíntota oblicua (a la derecha y a la izquierda)

b) i. $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ii. Asíntota vertical: $x = 1$, pues en $x = 1$ el denominador de $g(x)$ es cero y $\lim_{x\to1} g(x) = \infty$.

iii. Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

iv. Asíntotas oblicuas: aplicando el mismo argumento de la parte a), se tiene

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \ \text{ y } \ b = \lim_{x\to+\infty} [g(x) - x] = +\infty$$

Por tanto, no existe asíntota oblicua a la derecha. Análogamente, no tiene asíntota oblicua a la izquierda.

c) i. $D_h = [0; 3]$

ii. Asíntota vertical: no tiene, pues si bien es cierto que $x = 4$ anula el denominador de $h(x)$, el dominio no permite tomar $\lim_{x\to4} h(x)$.

iii. No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas, puesto que el dominio no permite tomar límites al infinito.

Ejemplo 52. Si $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$, esboce su gráfica mostrando sus asíntotas.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Intersecciones con los ejes

i. Con el eje y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow A(0; 3)$

ii. Con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2$, $x_2 = 3 \Rightarrow B(-1/2; 0)$, $C(3; 0)$

c) Asíntotas verticales: $x = 1$, pues $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$.

Para graficar, se necesita determinar el signo de ∞ cuando $x \to 1^-$ y $x \to 1^+$. Así, se obtiene

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-5x-3}{x-1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-5x-3}{x-1} = -\infty$$

d) Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

e) Asíntotas oblicuas: la recta $y = 2x - 3$ es una asíntota oblicua (a la derecha y a la izquierda) de la curva $y = f(x)$, pues

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 \;\text{ y }\; b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - 2x] = -3$$

f) La gráfica se muestra en la fig. 3.28.

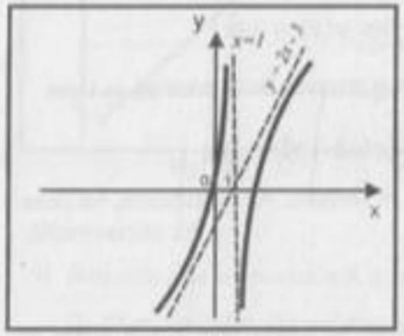


Fig. 3.28

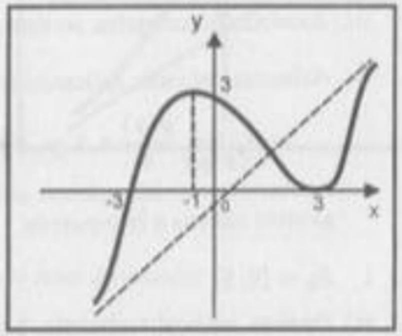


Fig. 3.29

Ejemplo 53 Halle las asíntotas de la curva $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$ y trace su gráfica mostrando sus asíntotas.

Solución

a) $y = \sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)}$, $D_f = \mathbb{R}$

b) No tiene asíntotas verticales (no tiene denominador)

c) Como

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = -1\,,$$

entonces la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua (a la derecha y a la izquierda). En consecuencia, no tiene asíntotas horizontales.

d) La gráfica de la función se muestra en la figura 3.29.

Ejemplo 54 Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 20x}$ mostrando sus asíntotas.

Solución

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 20x \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; (x-2)(x+2)(x-5)x \geq 0\} = \langle -\infty; -2] \cup [0; 2] \cup [5; +\infty\rangle$

b) Intersecciones con los ejes coordenados: $A(-2;0)$, $B(0;0)$, $C(2;0)$ y $D(5;0)$.

c) No tiene asíntotas verticales.

d) No tiene asíntotas horizontales, pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

e) Asíntotas oblicuas:

i. $m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ y $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = -\frac{5}{4}$

Luego, la recta $y = x - 5/4$ es asíntota oblicua a la derecha.

ii. $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$ y $b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx] = \frac{5}{4}$

Por lo tanto, la recta $y = -x + 5/4$ es asíntota oblicua a la izquierda.

f) La gráfica se muestra en la figura 3.30.

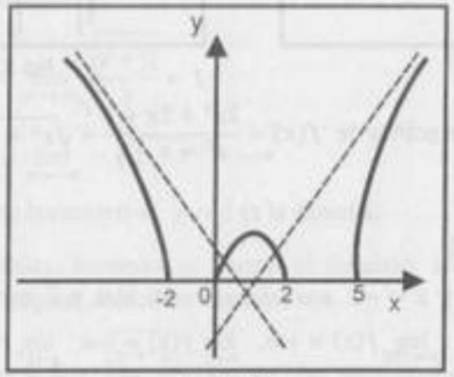


Fig. 3.30

www.FreeLibros.com

Ejemplo 55. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{(5-x)(x+4)}{(x+6)(x-2)}}$.

Solución

a) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{(5-x)(x+4)}{(x+6)(x-2)} \geq 0 \right\} = \langle -6; -4] \cup \langle 2; 5]$

b) Intersecciones con los ejes coordenados: $A(5;0)$ y $B(-4;0)$.

c) No existen asíntotas oblicuas ni horizontales porque el dominio de la función no permite tomar límites cuando $x \to \pm\infty$.

d) Las rectas $x = -6$ y $x = -2$ son las asíntotas verticales, pues

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

e) La gráfica se muestra en la Fig. 3.31.

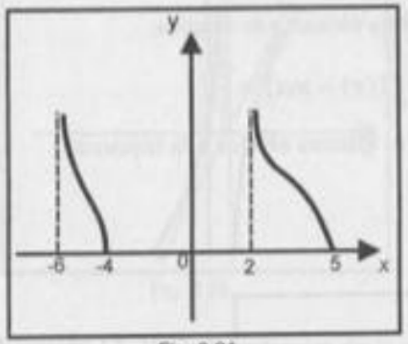


Fig. 3.31

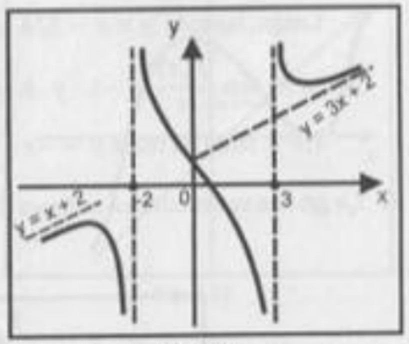


Fig. 3.32

Ejemplo 56 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^3+3x+1}{x^2-x-6} + \sqrt{x^2+6}$ indicando sus asíntotas.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$

b) Las rectas $x = 3$ y $x = -2$ son asíntotas verticales, porque

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

c) Asíntotas oblicuas.- siguiendo el procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores, se tiene

i. $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2x^3+3x+1}{x^2-x-6} - 2x \right) + \left(\sqrt{x^2+6} - x \right) \right] = 2$$

Luego, la recta $y = 3x + 2$ es una asíntota oblicua a la derecha.

ii. $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2x^3+3x+1}{x^2-x-6} - 2x \right) + \left(\sqrt{x^2+6} + x \right) \right] = 2$$

Luego, la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua a la izquierda.

d) La gráfica se muestra en la figura 3.32.

Ejemplo 57. Trace la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}, & x > 0 \\ \dfrac{x^3-x}{(x+1)(x+4)}, & -3 < x \leq 0 \\ -\sqrt{1+x^2}, & x \leq -3 \end{cases}$

indicando sus asíntotas.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Asíntotas horizontales:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = 1$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+x^2} = -\infty$

La única asíntota horizontal es $y = 1$ (a la derecha).

c) Asíntotas verticales: teniendo en cuenta el dominio, las posibles asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = -1$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-x}{(x+1)(x+4)} = \dfrac{2}{3}$, entonces $x = 0$ es la única asíntota vertical ($x = -1$ no es asíntota vertical).

www.FreeLibros.com

d) Asíntotas oblicuas

i. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+x^2} - x\right) = 0$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua a la izquierda.

No existe asíntota oblicua a la derecha porque en ese lado ya existe asíntota horizontal.

e) La gráfica se muestra en la Fig. 3.33.

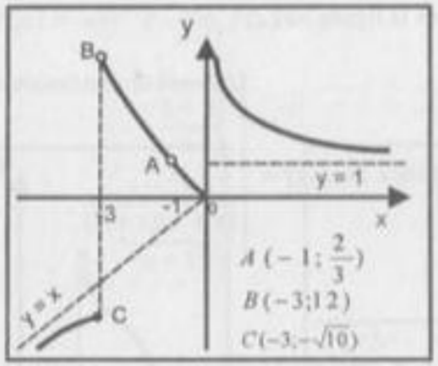


Fig. 3.33

Observación 11. *Si la función es de la forma $x = g(y)$ (x en función de y), para obtener sus asíntotas usaremos los resultados obtenidos en las proposiciones 7, 8 y 9 (intercambiando las variables correspondientes), esto es,*

i) *La recta $x = k$ es una asíntota vertical si $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = k$ ó $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = k$.*

ii) *La recta $y = a$ es una asíntota horizontal si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$\lim\limits_{y\to a} g(y) = \pm\infty$ *ó* $\lim\limits_{y\to a^+} g(y) = \pm\infty$ *ó* $\lim\limits_{y\to a^-} g(y) = \pm\infty$.

iii) *La recta $x = ky + b$ es asíntota oblicua de $g(y)$ si y solo si*

$\left\{\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{g(y)}{y} = k \wedge \lim\limits_{y\to+\infty} [g(y) - ky] = b\right\}$ ó

$\left\{\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{g(y)}{y} = k \wedge \lim\limits_{y\to-\infty} [g(y) - ky] = b\right\}$

Ejemplo 58. Trace la gráfica de la curva $y^3 - y^2x + y^2 + x = 0$ mostrando sus asíntotas.

Solución

Observando la ecuación de la curva, es más fácil despejar x. Así, se obtiene

$$x = \frac{y^3 + y^2}{y^2 - 1}$$

Luego, $g(y) = \dfrac{y^3 + y^2}{y^2 - 1}$.

a) La variación de y (rango) es $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.

b) No existen asíntotas verticales, pues $\lim\limits_{y\to\pm\infty} g(y) = \pm\infty$.

c) Las rectas $y = 1 \wedge y = -1$ son las posibles asíntotas horizontales.

Como $\lim\limits_{y\to-1} g(y) = -1/2$, la recta $y = -1$ no es asíntota horizontal.

Puesto que $\lim\limits_{y\to1^+} g(y) = +\infty \wedge \lim\limits_{y\to1^-} g(y) = -\infty$, la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal.

(Si $y \to 1^+ \Rightarrow x \to +\infty \wedge$ si $y \to 1^- \Rightarrow x \to -\infty$).

d) Considerando que $k = \lim\limits_{y\to\pm\infty} \dfrac{g(y)}{y} = 1 \wedge b = \lim\limits_{y\to\pm\infty} [g(y) - ky] = 1$, entonces la única asíntota oblicua es $x = y + 1$.

e) La gráfica se muestra en la figura 3.34.

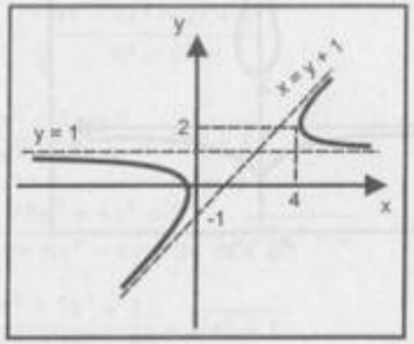


Fig. 3.34

www.FreeLibros.com

Ejemplo 59 Trace la gráfica de la curva $y^3x^2 - y^2 + y + 2 = 0$ mostrando sus asíntotas.

Solución

Se observa que la curva es simétrica con respecto al eje y, pues al reemplazar x por $-x$ su ecuación no varía. Despejando x en términos de y, se obtiene

$$x^2 = \frac{y^2 - y - 2}{y^3} \implies x = \pm\sqrt{\frac{y^2 - y - 2}{y^3}}$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje y, solo analizaremos la función

$$g(y) = \sqrt{\frac{y^2 - y - 2}{y^3}}$$

a) Rango (variación de y): $[-1; 0) \cup [2; +\infty)$.

b) La recta $y = 0$ es la única asíntota horizontal porque $\lim\limits_{y \to 0^-} g(y) = +\infty$.

c) La recta $x = 0$ es la única asíntota vertical, pues $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 0$.

d) No tiene asíntotas oblicuas.

La gráfica de la curva se muestra en la Fig. 3.35. La parte de la curva que se encuentra a la derecha del eje y corresponde a la función $g(y)$ y la parte que se encuentra a la izquierda del eje y se ha graficado considerando la simetría.

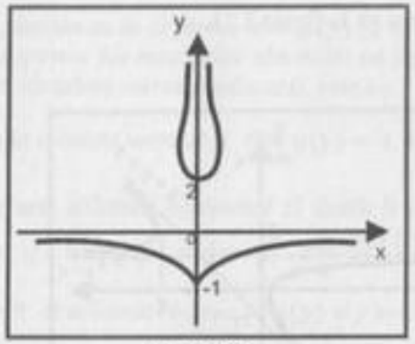


Fig. 3.35

EJERCICIOS

I) En los siguientes ejercicios, halle las asíntotas de la gráfica de $f(x)$ y trace su gráfica mostrando sus asíntotas.

1) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + 2x$

2) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 4}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{(x - 3)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 7x + 10}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2 - 6x - 8}{16x^2 + 4x - 6}}$

8) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + 2x - 24}}$

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{16x^2 + 4x - 6}{9x^2 - 6x - 8}}$

10) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{21 + 4x - x^2}{x^2 + 7x - 8}}$

11) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x}$

12) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 - 25x + 125}$

13) $f(x) = x + \sqrt[4]{\dfrac{x^6 - 9x^4 - x^2 + 9}{x^2 - 25}}$

14) $f(x) = x - \sqrt[4]{\dfrac{x^6 - 9x^4 - x^2 + 9}{x^2 - 25}}$

15) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} + \sqrt{x^2 + 4}$

16) $f(x) = \dfrac{-6x^5 + 4x^4 + 5}{x^3 - 6x^2 - 4x + 24} + \sqrt{36x^4 + 5}$

17) $f(x) = \dfrac{x^5 + 5x^4 + 1}{x^4 - 11x^2 - 80} - \sqrt[3]{x^3 + 1}$

www.FreeLibros.com

18) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}, & |x| < 2 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+x}, & |x| \geq 2 \end{cases}$ R. $x = 2$, $y = 2$

19) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ \dfrac{3x}{2x+1} + 3x, & |x| \geq 1 \end{cases}$

20) $f(x) = \begin{cases} x + \left[\!\left[\dfrac{5x-17}{x-3}\right]\!\right], & x \leq -3 \\ \dfrac{|10x-1| + 50x^2 - 19}{(x-2)(x^2+4x+3)}, & -3 < x < 1 \\ \sqrt[3]{8x - 8x^6} - 5x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

R. $y = x + 5$, $x = -1$, $x = -3$

21) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} - x, & |x| \geq 9 \\ \dfrac{x^2-81}{x^2-9x}, & |x| < 9 \wedge x \neq 0 \end{cases}$

22) $f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[2 + \dfrac{2}{x}\right]\!\right], & x < -3 \\ \sqrt[3]{\dfrac{2x+2}{x-1}}, & -3 \leq x < 1 \\ \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, & x \geq 1 \end{cases}$

R. $x = 1$, $y = 1$, $y = x - 5$

23) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-4x-21)(x^2+2x+1)}{(x-1)^2(2x^2-3x+5)}, & x \leq -3 \\ \dfrac{x^3+x^2-2x}{(x-2)(x^2+2x-3)}, & x \in (-3;2) \wedge x \neq 1 \\ \sqrt[3]{6x^2-x^3}, & x \geq 2 \end{cases}$

R. $x = 2$, $x = 1$, $x = -3$, $2y = 1$, $y = 2 - x$

www.FreeLibros.com

24) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{\dfrac{x^8+2x+1}{x^3+8}}, & x \leq -1 \\ \left[\!\left[-\dfrac{x+1}{x+3}\right]\!\right], & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{x[\![2+1/x]\!]+7}{2x-1}}, & x > 1 \end{cases}$

R. $y = x$, $y = 1$

25) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x} + \left[\!\left[\dfrac{7x-11}{2-x}\right]\!\right], & x \leq 0 \\ \dfrac{Sgn|x^2-4| - 22x}{x^2-1}, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{26}{15}\sqrt[3]{19-20x^2-27x^3} - 3x, & x \geq 2 \end{cases}$

II) Trace la gráfica de cada curva mostrando sus asintotas.

1) $y^3 - 6x^2 + x^3 = 0$

2) $y^2(x-2) = x^3 - 1$

3) $x^3 - 2y^2 - y^3 = 0$

4) $x^2(y-2)^2 = y^4 - 1$

5) $xy^2 + yx^2 = a^3$, $a > 0$

6) $x^2(x-y)^2 = a^2(x^2+y^2)$

7) $4x^3 = (a+3x)(x^2+y^2)$, $a > 0$

8) $y^3 = (x-a)^2(x-c)$, $a > 0$, $c > 0$

III) Halle las constantes a y b, de modo que se verifique la condición:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3\sqrt[3]{x^2+1} + 3}{x-3} - ax - b \right) = 0$

R. $a = 1$, $b = 3$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3\sqrt[3]{x^3+1}+5}{x+3}-ax-b\right)=0$

R. $a=1$, $b=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3-\sqrt[4]{x^8+1}-\sqrt[3]{x^6+1}+1}{x^2-4}-ax-b\right)=0$

R. $a=5$, $b=-2$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^3+\sqrt[4]{x^8+1}+\sqrt[3]{x^6+1}+5}{x^2+4}-ax-b\right)=0$

R. $a=5$, $b=2$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6x^4+4\sqrt[4]{x^{12}+1}-x^3-\sqrt[3]{x^9+1}+7}{x^3-8}-3ax-2b\right)=0$

R. $a=2$, $b=-3$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x^4+5\sqrt[4]{x^{12}+1}-7x^3-\sqrt[3]{x^9+1}-9}{x^3+8}-2ax-3b\right)=0$

R. $a=3$, $b=-1$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{15x^3+7x+4}{3x^2+4}-\sqrt{x^2+4x}-\sqrt[3]{8x^3+12x^2+1}+2ax-3b\right)=0$

R. $a=-1$, $b=-1$

www.FreeLibros.com

4 CONTINUIDAD

4.1 NOCIÓN INTUITIVA DE FUNCIÓN CONTINUA

Sean f y g dos funciones definidas en un mismo intervalo, cuyas gráficas se muestran en la figura 4.1.

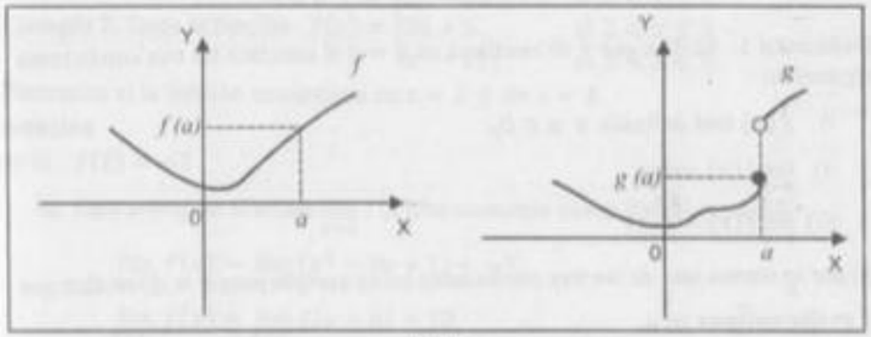


Fig 4.1

En la figura 4.1, las gráficas de las funciones tienen un comportamiento diferente en el punto a. Mientras que la gráfica de f varía de manera **continua** en las proximidades del punto a (no tiene salto o ruptura), la gráfica de g presenta un salto en el punto de abscisa a.

En símbolos, afirmar que f es **continua** en el punto a significa

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ /\ x\in D_f, a-\delta<x<a+\delta$$
$$\Rightarrow f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$$

Esta expresión es equivalente a

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ /\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon,\ \text{si } |x-a|<\delta\ \wedge\ x\in D_f$$

Geométricamente, una función f es **continua** en un punto de su dominio cuando su gráfica no se "rompe" en este punto. Su gráfica se traza sin levantar el bolígrafo del papel (Fig. 4.2).

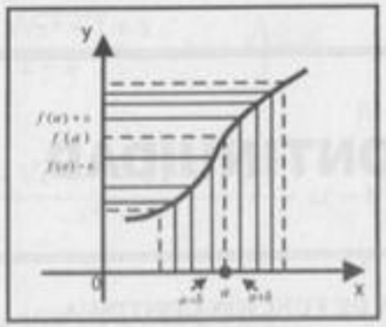


Fig. 4.2

4.2 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA

Sea f una función definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$.

Definición 1. Se dice que f es **continua** en $x = a$ si satisface las tres condiciones siguientes:

i) $f(a)$ está definido $\forall\ a \in D_f$

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si por lo menos una de las tres condiciones no se cumple para $x = a$, se dice que f es **discontinua** en a.

Ejemplo 1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}, & \text{si } 0 < x < 5 \wedge x \neq 3 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{si } x = 3 \end{cases}$

Determine si f es continua en $x = 3$.

Solución

i) $f(3) = \dfrac{3}{2}$ (existe)

ii) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{3}{2}$

iii) De i) y ii), se verifica

$$f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$$

Luego, f es continua en $x = 3$.

La gráfica de f se muestra en la figura 4.3.

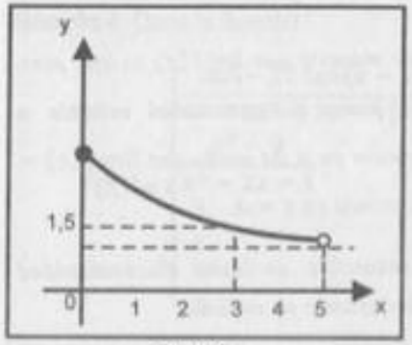


Fig. 4.3

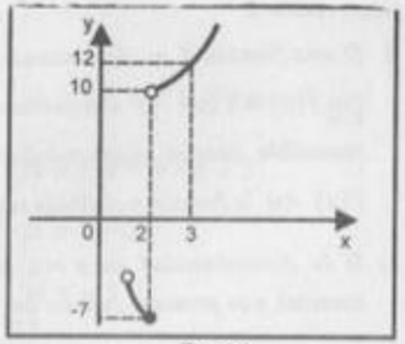


Fig. 4.4

Ejemplo 2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2x + 6, & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ x^3 - 15, & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$

Determine si la función es continua en $x = 2$ y en $x = 3$.

Solución

a) i) $f(2) = -7$

ii) Para averiguar si existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, es necesario tomar límites laterales

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 6x + 1) = -7$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 6) = 10$$

Luego, no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Por tanto, la función no es continua en $x = 2$ ó es discontinua en $x = 2$.

b) i) $f(3) = 12$ (existe)

ii) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + 6) = 12$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^3 - 15) = 12$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 12$ (existe)

iii) De i) y ii), se concluye que

$$f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 12$$

Por tanto, f es continua en $x = 3$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 4.4.

www.FreeLibros.com

Observación 1.

i) *Si una función f es discontinua en a de manera que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, la discontinuidad se llama* ***discontinuidad evitable o removible****, pues se puede redefinir la función en a de modo que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Así, la función redefinida resulta continua en $x = a$.*

ii) *Si la discontinuidad en $x = a$ no es removible, se llama* ***discontinuidad esencial****, y se presenta cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe o no es finito.*

Ejemplo 3. Si $f(x) = \frac{6x+24}{x^2+3x-4}$, determine sus puntos de discontinuidad. Además, indique el tipo de discontinuidad y, si es posible, redefina la función para evitar la discontinuidad.

Solución

En esta función, la discontinuidad se presenta en los valores de x para los cuales el denominador se anula, es decir, $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) = 0$.

Luego, f no está definida en $x = 1$ y $x = -4$.

Para determinar el tipo de discontinuidad, calculamos los límites en estos puntos.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -4} f(x) = -\frac{6}{5}$$

En consecuencia, la discontinuidad en $x = -4$ es evitable y la discontinuidad en $x = 1$ es esencial.

Redefiniendo la función f en $x = -4$, se obtiene la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+24}{x^2+3x-4}, & \text{si } x \neq -4 \\ -\dfrac{6}{5}, & \text{si } x = -4 \end{cases}$$

Se observa que g es continua en $x = -4$, mientras que la discontinuidad en $x = 1$ no puede evitarse (la discontinuidad en $x = 1$ es esencial).

Ejemplo 4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27\,\mathrm{Sgn}(x-1)}{x^3+3x^2+3x-9[\![x/9]\!]}, & \text{si } -5 < x < 0 \wedge x \neq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}, & \text{si } 0 \leq x < 5 \wedge x \neq 3 \\ \dfrac{9}{4}, & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Determine si f es continua en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución

Considerando que $[\![\frac{x}{9}]\!] = -1$ para $-5 < x < 0$ y $Sgn(x-1) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$,

se obtiene: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+27}{x^3+3x^2+3x+9}, & -5 < x < 0 \wedge x \neq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}, & 0 \leq x < 5 \wedge x \neq 3 \\ \dfrac{9}{4}, & x = -3 \\ \dfrac{3}{2}, & x = 3 \end{cases}$

a) Como $f(-3) = \frac{9}{4}$ y $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^3+3x^2+3x+9} = \frac{9}{4} = f(-3)$,

entonces f es continua en $x = -3$.

b) $f(0) = 3$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ (los límites laterales son iguales)

Por tanto, f es continua en $x = 0$.

c) $f(3) = \frac{3}{2} = \lim_{x\to 3} f(x)$

En consecuencia, f es continua en $x = 3$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 4.5.

www.FreeLibros.com

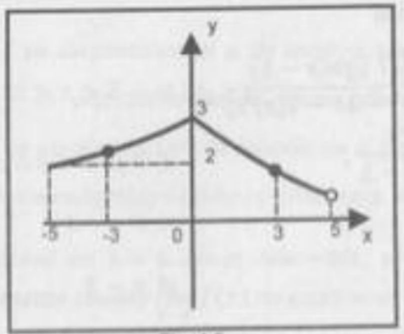


Fig. 4.5

Ejemplo 5. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}(x^2-4)-3, & \text{si } x\le -3\\ x[\![x/3]\!]+5\operatorname{Sgn}(x-2), & \text{si } -3<x<0\\ \dfrac{x-3}{x^2-x-6}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

a) Determine los puntos de discontinuidad.

b) Determine el tipo de discontinuidad y, si es posible, redefinir la función para evitar la discontinuidad.

Solución

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{si } x\le -3\\ -x-5, & \text{si } -3<x<0\\ \dfrac{x-3}{(x-3)(x+2)}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

a) Los posibles puntos de discontinuidad son $x=-3$, $x=0$ y $x=3$. Analizaremos la continuidad en cada punto.

i) Para $x=-3$, tenemos $f(-3)=-2$

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=-2$ y $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=-2$, entonces $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-2$

Luego, f es continua en $x=-3$.

ii) En $x=0$, se tiene $f(0)=1/2$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-5$ y $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1/2$, entonces no existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

Por tanto, $x=0$ es un punto de discontinuidad de tipo esencial.

iii) $f(3)$ no existe y $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\dfrac{1}{5}$.

En consecuencia, $x=3$ es un punto de discontinuidad de tipo evitable.

b) Redefiniendo f para que sea continua en $x=3$, se obtiene la función

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}(x^2-4)-3, & x\le -3\\ x[\![x/3]\!]+5\operatorname{Sgn}(x-2), & -3<x<0\\ \dfrac{x-3}{x^2-x-6}, & x\ge 0\ \wedge\ x\ne 3\\ \dfrac{1}{5}, & x=3\end{cases}$$

Ejemplo 6. Determine a y b de manera que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}, & x>1\\ ax+b, & -2\le x\le 1\\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}, & x<-2\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$, será suficiente que lo sea en $x=-2$ y en $x=1$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax+b)=a+b=f(1)$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2-2x}{\sqrt{x}-1(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-2(x-1)\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}(ax+b)=-2a+b=f(-2)$$

Por las condiciones de continuidad, debe cumplirse que

$$a+b=0\ \wedge\ -2a+b=2/3$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene $a=-2/9$ y $b=2/9$.

www.FreeLibros.com

En las demostraciones de ciertos teoremas o proposiciones, en lugar de usar la definición 1, se usa su definición rigurosa de con, que es la siguiente:

Definición 2. Una función $f: D \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto $D \subset \mathbb{R}$, es continua en el punto $a \in D$ si

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ x \in D \ /\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definición 3. (Continuidad en un Conjunto) Una función $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en el conjunto $B \subset A$ cuando f es continua en a, $\forall\, a \in B$.

Ejemplo 7. Demuestre que la función constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = k$, donde k es una constante, es continua en $\mathbb{R}$.

Solución

Sea $a \in \mathbb{R}$ (arbitrario) y $\varepsilon > 0$. Para cualquier $\delta > 0$ se tiene:

Si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |k - k| = 0 < \varepsilon$

Luego, f es continua en a. Como a es arbitrario, f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 8. Demuestre que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = x$ es continua $\mathbb{R}$.

Solución

Tomemos $a \in \mathbb{R}$ (arbitrario) y $\varepsilon > 0$. Tomando $\delta = \varepsilon$, se verifica:

Si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$

Luego, f es continua en a y, como a es arbitrario, f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 9. Demuestre que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

Solución

Tomemos $a \in \mathbb{R}$ (arbitrario) y $\varepsilon > 0$. Se desea resolver la desigualdad

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a| \leq |x-a|(|x| + |a|) < \varepsilon \qquad (1)$$

Para $\delta_1 = 1$, se tiene $|x-a| < \delta_1 = 1 \Rightarrow |x| < |a| + 1 \qquad (2)$

De (1) y (2), tenemos

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a|(|x| + |a|) \leq |x-a|(2|a| + 1) < \varepsilon$$

De la última desigualdad, obtenemos $|x-a| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1} = \delta_2$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \text{mín}\left\{1;\ \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}\right\} > 0\ /\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

www.FreeLibros.com

Teorema 1. Sean f y g dos funciones reales continuas en a, entonces

a) $k \cdot f$ es continua en a, siendo k constante

b) $f \pm g$ es continua en a

c) $f \cdot g$ es continua en a

d) $\dfrac{f}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$

e) $\dfrac{1}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$

f) $|f|$ es continua en a

Demostración

Como f y g son continuas en a, se verifican

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

a) Para probar que $k \cdot f$ es continua en a, será suficiente verificar que

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kf(a)$$

En efecto, $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k\, f(a)$. Luego, kf es continua en a.

La demostración de las otras propiedades se dejan como ejercicio al lector.

Corolario 1. Toda función polinomial

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,\quad a_0 \neq 0$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Corolario 2. Toda función racional

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

es continua en su dominio.

Observación 2. *Los recíprocos del teorema 1 no necesariamente se verifican. Por ejemplo, puede suceder que $f + g$ sea continua en a, sin que f y g lo sean.*

Ejemplo 10

Las funciones $f,\ g$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

no son continuas en $x = 0$.

Sin embargo, las funciones

$$f(x) + g(x) = 1,\ f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ y } |h(x)| = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 11. Determine todos los valores de x para los cuales la función dada es continua.

a) $f(x) = x^5(x+4)^8$ b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 9}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = |x^2 - 6|$

Solución

a) Como f es una función polinomial, entonces es continua en $\mathbb{R}$.

b) Puesto que g es una función racional y su dominio es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, entonces g es continua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

c) Por ser h el valor absoluto de una función polinomial, es continua en $\mathbb{R}$.

> **Teorema 2.** Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $a \in A$ y $g : B \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $b = f(a) \in B$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de g en el punto b, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que si $y \in B$, con $|y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

Por otro lado, la continuidad de f en a asegura que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \ \wedge \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

En consecuencia, tenemos

$$x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es continua en a.

> **Teorema 3.** Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones, con $R_f \subset B$, tales que
>
> i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$
>
> ii) g es continua en b
>
> Entonces, $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$

Demostración

Sea $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ b, & \text{si } x = a \end{cases}$

De i) se deduce que h es continua en a. Por el teorema 2, $g \circ h$ es continua en a, es decir,

$$\lim_{x \to a}(g \circ h)(x) = (g \circ h)(a) = g(h(a)) = g(b) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

Por otro lado, como f y h difieren a lo más en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a}(g \circ h)(x) = \lim_{x \to a}(g \circ f)(x)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$$

El teorema también se verifica cuando a se reemplaza por $\pm\infty$.

Ejemplo 12. Halle $\lim_{x \to 2} \sqrt{3x^2 + 4}$.

Solución

Considerando $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = 3x^2 + 4$, tenemos

$$g(f(x)) = \sqrt{3x^2 + 4},\ \lim_{x \to 2} f(x) = 16 \text{ y } g \text{ es continua en } x = 16$$

Por el teorema 3,

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{3x^2 + 4} = \lim_{x \to 2} g(f(x)) = g(\lim_{x \to 2} f(x)) = g(16) = \sqrt{16} = 4$$

Ejemplo 13. Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Solución

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es tal que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Como $g(x) = x^n$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{x^n}$, entonces, por el teorema 3,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = g(\lim_{x \to \pm\infty} f(x)) = g(0) = 0.$$

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

1) Demuestre, usando ε y δ, que las siguientes funciones son continuas en el punto a indicado.

a) $f(x) = -8x + 7\,,\ a = 1$ b) $f(x) = 2x^2 + 3\,,\ a = 3$

c) $f(x) = x^3\,,\ a = -1$ d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1\,,\ a = 2$

2) Supongamos que existe una vecindad $B(a;r)$ y un número real $M > 0$ tal que f satisface la condición $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|\,,\ \forall\, x \in B(a;r)$. Demuestre que f es continua en $x = a$.

3) Demuestre si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

4) Pruebe que $f(x) = [\![x]\!]$ es continua en todo $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

5) Por inducción, pruebe que si f_i $(i = 1, \ldots, n)$ son n funciones continuas en a, entonces

a) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es continua en a.

b) $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ es continua en a.

6) Indique un ejemplo de una función f definida en $\mathbb{R}$ que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en $\mathbb{R}$.

En cada uno de los siguientes ejercicios, determine si la función es continua en el punto a. Si es discontinua, indique el tipo de discontinuidad.

7) $f(x) = \begin{cases} 5x - 3\,, & \text{si } x \neq 1 \\ 1\,, & \text{si } x = 1 \end{cases}\ ;\ a = 1$ R. disc. evitable

8) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\,, & \text{si } x < 1 \\ 1 - |x|\,, & \text{si } x > 1 \\ 1\,, & \text{si } x = 1 \end{cases}\ ;\ a = 1$ R. disc. evitable

9) $f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{si } x \geq -1 \\ 1 - |x|\,, & \text{si } x < -1 \end{cases}\ ;\ a = -1$ R. disc. esencial

10) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x^2 - 4|}\,, & \text{si } x \neq \pm 2 \\ \dfrac{3}{4}\,, & \text{si } x = \pm 2 \end{cases}\ ;\ a = \pm 2$ R. disc. esencial

11) $f(x) = \begin{cases} x + 2\,, & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 1\,, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 - x\,, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}\ ;\ a = -1,\ a = 1$

12) $f(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ x - 1\,, & \text{si } 0 < x < 2 \\ 5 - x^2\,, & \text{si } 2 \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}\ ;\ a = 0 \text{ y } a = 2$

En los siguientes ejercicios, verifique si es posible determinar un número L para que la función f sea continua en el punto a. En caso afirmativo, determine L; en caso contrario, justifique su respuesta.

13) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}\,, & x \neq 4 \\ L\,, & x = 4 \end{cases}\ ;\ a = 4$ R. $L = 5$

14) $f(x) = \begin{cases} |x|\,, & \text{si } x > 0 \\ 1 - x^2\,, & \text{si } x < 0 \\ L\,, & \text{si } x = 0 \end{cases}\ ;\ a = 0$ R. $\nexists\, L$

15) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\,, & \text{si } |x| < 1 \\ |x| - 1\,, & \text{si } |x| > 1 \\ L\,, & \text{si } |x| = 1 \end{cases}\ ;\ a = \pm 1$ R. $L = 0$

16) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}\,, & x \neq 4 \\ L\,, & x = 4 \end{cases}\ ;\ a = 4$ R. $\dfrac{1}{4}$

17) $f(x) = \begin{cases} |x| - 2\,, & \text{si } |x| < 2 \\ 4 - x^2\,, & \text{si } |x| > 2 \\ L\,, & \text{si } |x| = 2 \end{cases}\ ;\ a = \pm 2$ R. $L = 0$

18) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{Sgn}(9 - x^2)\,, & \text{si } |x| > 4 \\ |x^2 - 16| - 1\,, & \text{si } |x| < 4 \\ L\,, & \text{si } |x| = 4 \end{cases}\ ;\ a = \pm 4$ R. $L = -1$

19) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 2x - 3|}{x - 3}\,, & \text{si } x \neq 3 \\ L\,, & \text{si } x = 3 \end{cases}\ ;\ a = 3$ R. $\nexists\, L$

20) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2\,, & \text{si } |x| < 2 \\ L\,, & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}\ ;\ a = \pm 2$

21) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{67}{17}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt[3]{x + 11} - 4}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 6} + \sqrt{1 - x} - 5}\right), & x < -3 \\ L\,, & x = -3 \\ \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2 - 20x - 129}{x^2 - 9} - \dfrac{10}{x + 3}\right), & x > -3 \end{cases}\ ;\ a = -3$

www.FreeLibros.com

En los siguientes ejercicios se dan las funciones f y g. Determine si las funciones $f,\ g,\ f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ son continuas en $x=0$.

22) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right), & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{2x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, & x=0\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}, & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x\sqrt{1-4x^{-2}}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

En los ejercicios del 24 al 30, determine los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

24) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}(x^2-3x-10), & x\leq -3\\ |x^2-9|, & -3<x\leq 2\\ -x^2+4x+3, & 2<x<5\\ -\dfrac{2}{(x-4)^2}, & x>5\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right), & x\leq -1\\ \dfrac{x^3}{x^2-9}, & |x|<1\\ -\dfrac{1}{8}+\sqrt{x^2-2x+1}, & x\geq 1\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}(x^2-4x)-1, & x\leq -3\\ \dfrac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt[3]{3x^2-19}-6}{x-3}, & -3<x\leq 3\\ \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{3-10x}{x^3-27}+\dfrac{1}{x-3}\right), & 3<x\leq 4\\ \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[3]{16-x\sqrt{5x-4}}}, & x>4\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}-2}, & x<8\\ 3-2x, & x\geq 8\end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}, & x>1\\ \dfrac{2x}{x^2-3}, & x\leq 1\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}, & |x|<4\\ \dfrac{2}{x^2-16}, & |x|>4\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{1+4x^{-2}}, & x<0\\ 2x-1, & x\geq 0\end{cases}$

31) Suponga que la función costo para la compra de una cantidad x de un producto está dada por

$$C(x)=\begin{cases}30x, & 0<x\leq 500\\ 20x, & 500<x\leq 1000\\ 10x, & x>1000\end{cases}$$

Construya el gráfico de $C(x)$ y encuentre los puntos de discontinuidad ¿Cuál es la interpretación económica?

32) a) Dé una condición necesaria y suficiente que deben cumplir A y B para que la función

$$f(x)=\begin{cases}Ax-B, & x\leq 1\\ 3x, & 1<x<2\\ Bx^2-A, & x\geq 2\end{cases}$$

sea continua en $x=1$, pero discontinua en $x=2$.

b) Ídem para que sea discontinua en x = 1 y continua en x = 2.

R. a) $A\neq 6$ y $B\neq 3$ b) $A\neq 6$ y $B\neq 3$

33) La moneda de un país es el "liberal", denotada por $\mathcal{L}$. El impuesto a la renta I es una función continua del ingreso x, calculado de la siguiente manera:

i) Si $x\leq 24000\mathcal{L}$, el contribuyente no paga impuesto.

ii) Si $x>24000\mathcal{L}$, se calcula el 15% de x y del valor obtenido se resta un valor fijo p, obteniéndose el impuesto a pagar I.

Calcule el valor fijo p.

R. $p=3600\ \mathcal{L}$

www.FreeLibros.com

34) El precio por kilo de un determinado producto viene dado, en función del número de kilos que se venden, por la función:

$$p(x) = \begin{cases} ax + 20\,, & \text{si } x \leq 10 \\ \dfrac{3x}{x-10} - \dfrac{6x}{x^2 - 18x + 80}\,, & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halle el valor de a para que no exista una cantidad crítica de compra (donde el precio del kilo no sufra un salto brusco).

b) Halle el límite de la función cuando $x \to +\infty$ e interprete el resultado.

35) En el laboratorio de Biología de una universidad, han determinado que el tamaño T de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t+a}\,, & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8}\,, & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) ¿Cuál será el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente?

36) Un comerciante vende un determinado producto y por cada unidad de éste cobra la cantidad de S/. 5. No obstante, si no le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x\,, & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500}\,, & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halle a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

* El precio de una unidad es $C(x)/x$.

R. a) $a = 20$ b) S/. $\sqrt{20}$

4.3 CONTINUIDAD DE FUNCIONES EN INTERVALOS

Definición 4. Una función $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ es continua en $(a; b)$ si es continua en todo $x \in (a; b)$.

Definición 5.

a) Una función f es continua por la derecha en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

b) Una función f es continua por la izquierda en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Definición 6. Una función f es continua en $(a; b]$ si:

i) f es continua en $(a; b)$ y

ii) f es continua por la izquierda en b

Definición 7. Una función f es continua en $[a; b)$ si:

i) f es continua en $(a; b)$ y

ii) f es continua por la derecha en a

Definición 8. Una función f es continua en $[a; b]$ si:

i) f es continua en $(a; b)$,

ii) f es continua por la derecha en a y

iii) f es continua por la izquierda en b

Ejemplo 14. Sea $f(x) = [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua por la derecha en todo $n \in \mathbb{Z}$ y que no existe $\lim\limits_{x \to n} f(x)$.

Solución

Por definición de $[\![x]\!]$, $\forall\, x \in [n; n+1) \Rightarrow [\![x]\!] = n$ y

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to n^+} n = n$$

Como $f(n) = n$, $f(x) = [\![x]\!]$ es continua por la derecha en n.

Por otro lado, $\forall\, x \in [n-1; n)$ se tiene $[\![x]\!] = n - 1$ y

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to n^-} (n-1) = n - 1$$

Como los límites por la izquierda y por la derecha en n son diferentes, concluimos que $\lim\limits_{x \to n} f(x)$ no existe.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 15. Dada la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x^2-9}}$, determine los intervalos donde f es continua.

Solución

Considerando que $D_f=[-5;-3\rangle\cup\langle 3;5]$ y que f es continua en $\langle -5;-3\rangle$ y $\langle 3;5\rangle$, solo analizaremos la continuidad en $x=5$ y en $x=-5$.

Como $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=0=f(-5)$ y $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=0=f(-5)$, concluimos que f es continua en $[-5;-3\rangle$ y $\langle 3;5]$.

Ejemplo 16. Determine los intervalos donde la función f es continua si

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x^2-9}}, & \text{si } 3<|x|\le 5\\ \dfrac{\operatorname{Sgn}(x^2-16)}{\sqrt{|x|-[\![x/3]\!]}}, & \text{si } |x|\le 3 \wedge x\neq 0\\ \sqrt{\dfrac{x^2-25}{|2-x|}}, & \text{si } |x|>5\end{cases}$$

Solución

i) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$.

ii) Considerando la regla de correspondencia de f, debemos analizar la continuidad en los puntos $x=-5$, $x=-3$, $x=3$ y $x=5$. En los demás puntos del dominio, la función es continua, es decir, en los intervalos: $\langle -\infty;-5\rangle$, $\langle -5;-3\rangle$, $\langle -3;0\rangle$, $\langle 0;3\rangle$, $\langle 3;5\rangle$ y $\langle 5;+\infty\rangle$.

a) Tenemos $f(-5)=0$ y $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=0$ (los límites laterales son iguales).

Luego, f es continua en $x=-5$ y, por tanto, es continua en el intervalo $\langle -\infty;-3\rangle$.

b) $f(-3)=-1/2$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-1/2$

Se concluye que f no es continua en -3 por la izquierda, pero es continua en -3 por la derecha, lo que implica que es continua en $[-3;0\rangle$.

c) Dado que $f(3)=-1/\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1/\sqrt{3}$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$, se concluye que f no es continua en 3 por la izquierda ni por la derecha.

d) Como $f(5)=0$ y $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=0$ (los límites laterales son iguales), entonces f es continua en $\langle 3;+\infty\rangle$.

Por tanto, f es continua en los intervalos: $\langle -\infty;-3\rangle$, $[-3;0\rangle$, $\langle 0;3)$ y $\langle 3;+\infty\rangle$.

EJERCICIOS

I) En las funciones siguientes, determine la continuidad en los intervalos que se indican.

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|16-x^4|}{4-x^2}, & x\neq\pm 2\\ -8, & x=-2\\ 8, & x=2\end{cases}$

en $\langle -\infty;-2\rangle$, $\langle -\infty;-2]$, $\langle -2;2]$, $[-2;2]$, $[-2;2\rangle$, $[2;+\infty\rangle$ y $\langle 2;+\infty\rangle$.

2) $g(x)=\sqrt{|x|-[\![x]\!]}$ en $\langle 0;1]$, $[0;1]$ y $[1;3]$.

3) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^3+x^2-x-1|}{x^2-3x+2}, & x\neq 1,2\\ -4, & x=1\\ 4, & x=2\end{cases}$

en $\langle -\infty;1\rangle$, $\langle -\infty;1]$, $\langle 1;2\rangle$, $[1;2]$, $[2;+\infty\rangle$ y $\langle 2;+\infty\rangle$.

4) $f(x)=(x-1)[\![x]\!]$ en $[0;2]$.

II) En los siguientes ejercicios, indique si la función es o no continua en el intervalo donde ha sido definido. Además, esboce la gráfica de la función.

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$, $\quad 2<x<4$

2) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-6}{x^2-2x-8}, & -1<x<6,\ x\neq 4\\ -2, & x=4\end{cases}$

3) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{x^2-16}, & -5<x<5,\ x\neq\pm 4\\ -\dfrac{1}{8}, & x=-4\\ 2, & x=4\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+1, & -1<x\le 2\\ 2x-6, & 2<x\le 3\\ 4x-3-x^2, & 3<x<5\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)|x+2|}{|x^2-1|}, & 0<x<4,\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

www.FreeLibros.com

6) $f(x) = \begin{cases} x-4, & -1 < x \le 2 \\ x^2-6, & 2 < x < 5 \end{cases}$

III) Determine los valores de a y b de modo que la función dada sea continua en su dominio.

1) $f(x) = \begin{cases} x+2a, & x < -2 \\ 3ax+b, & -2 \le x \le 1 \\ 6x-2b, & x > 1 \end{cases}$ R. $a = 4/9,\ b = 14/9$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|2x^2-3x-9|}{2x^2-3x-9}, & x < -\dfrac{3}{2} \lor x > 3 \\ a, & x = 3 \\ b, & x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt[3]{3x+3}}{a(\sqrt[3]{x}-2)}, & x < 8 \\ ab, & x = 8 \\ \dfrac{2}{|2x-7|b}, & x > 8 \end{cases}$ R. $a = 2,\ b = -1/3$

4) $f(x) = \begin{cases} a\left(\dfrac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt[3]{x^2-24x+2}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt{5-x^2}-4}\right), & -\sqrt{5} \le x < -1 \\ \dfrac{a}{b}, & x = -1 \\ \dfrac{\sqrt[3]{31-x}-6x-8}{b^2(\sqrt[3]{26-x}-5x-8)}, & x > -1 \end{cases}$

R. $a = \dfrac{24\,531}{13\,600} \land b = \dfrac{135}{204}$

IV) En el siguiente grupo de ejercicios, determine los intervalos donde la función f es continua.

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-6}}$ 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{2-x-x^2}}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{4-\sqrt{x-2}}$ 4) $f(x) = \sqrt{|x| + \llbracket x \rrbracket}$

5) $f(x) = 1 - x + \llbracket x \rrbracket - \llbracket 1-x \rrbracket$ 6) $f(x) = |x - \llbracket x \rrbracket| + |x + \llbracket x+1 \rrbracket|$

7) $f(x) = \dfrac{|4x-3|-1}{\llbracket 3-4x \rrbracket}$ 8) $f(x) = \begin{cases} 1-x+\llbracket x \rrbracket, & x \ge 0 \\ \llbracket 1/x \rrbracket, & x < 0 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} |x - \llbracket x \rrbracket|, & \llbracket x \rrbracket \text{ es par} \\ |x - \llbracket x+1 \rrbracket|, & \llbracket x \rrbracket \text{ es impar} \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} x^3+3x+3, & x \le -1 \\ |x-2|, & -1 < x \le 4 \\ 8x-x^2-15, & x > 4 \end{cases}$

11) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 5 \\ \dfrac{x^2-4x-5}{|x-5|}, & x > 5 \end{cases}$

V) En los siguientes ejercicios, analice la continuidad de la función h.

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x > 3 \\ \llbracket x^2-1 \rrbracket, & 0 < x \le 3 \end{cases}$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x-4},\ x \ne 4$

$h = g \circ f$

R. $\langle 0;1 \rangle, [1;\sqrt{2}\rangle, [\sqrt{2};\sqrt{3}\rangle, [\sqrt{3};2\rangle, [2;\sqrt{5}\rangle, [\sqrt{6};\sqrt{7}\rangle, [\sqrt{7};\sqrt{8}\rangle, [\sqrt{8};3]$,
$\langle 3;19 \rangle, \langle 19;+\infty \rangle$

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16x^2-17x+1}, & x \ge 2 \\ \sqrt{x^2-3x+2}, & x \le 1 \end{cases}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-16},\ x \ge 0 \land x \ne 4$

$h = f \cdot g^{-1}$ R. $\langle -\infty; 1/16] \cup [2;+\infty\rangle$

3) $f(x) = \mathrm{Sgn}(x)$ y $g(x) = x - x^3$

a) $h = f \circ g$ R. discontinuidad en $x = -1, 0, 1$

b) $h = g \circ f$ R. continua

4) $f(x) = \mathrm{Sgn}(x)$, $g(x) = 1 + x - \llbracket x \rrbracket$

a) $h = f \circ g$

b) $h = g \circ f$ R. continua

5) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

$h = f \circ g$ R. continua

www.FreeLibros.com

6) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2 \\ 2, & |x| > 2 \end{cases}$

$h = f \circ g$ R. $h(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

7) $f(x) = (1 - x^4)\text{Sgn}(x)$, $h = f^{-1}$

8) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 - 2, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 8 \\ 2x^3, & x > 10 \end{cases}$

$h = g^{-1} \circ f^{-1}$

4.4. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS

Teorema 4. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a; b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe por lo menos un punto $c \in \langle a; b \rangle$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración

Recordemos que la condición $f(a) \cdot f(b) < 0$ significa que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (en el otro caso, la demostración es similar). Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a; b] \ / \ f(x) < 0\}$$

Evidentemente, $A \neq \emptyset$ (pues $a \in A$) y A es acotado superiormente (b es cota superior de A). Sea $c = Sup\, A$, entonces $c < b$, pues $f(b) > 0$. Como $f(a) < 0$, por la preservación de signo, existe un intervalo $[a; a + \delta_1]$ en el cual $f(x) < 0$. Del mismo modo, por ser $f(b) > 0$, existe un intervalo $[b - \delta_2; b]$ en el cual $f(x) > 0$. Se deduce que $f(c) \not> 0$, pues si $f(c) > 0$, por la conservación del signo, existiría $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0, \forall x \in [c - \delta; c + \delta]$ y $c - \delta$ sería una cota superior de A, lo cual contradice a la hipótesis de que $c = \sup A$. Además, $f(c) \not< 0$, pues si $f(c) < 0$, existiría $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in [c - \delta; c + \delta]$ y, por tanto, $c + \delta \in A$, lo cual es imposible, pues $c = \sup A$. Por tanto, forzosamente $f(c) = 0$.

Para el caso $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, se demuestra del mismo modo, utilizando la función $-f$.

Este teorema tiene una interpretación geométrica muy simple: "La gráfica de una función continua $y = f(x)$ que une los puntos $P(a; f(a))$ y $Q(b; f(b))$, donde $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios, corta al eje x, por lo menos, en un punto (Fig. 4.6).

La condición de que f sea continua en $[a; b]$ es necesaria. La figura 4.7 muestra que si f es discontinua en $[a; b]$, el teorema no siempre se verifica.

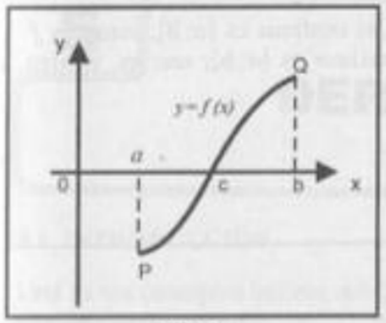


Fig. 4.6

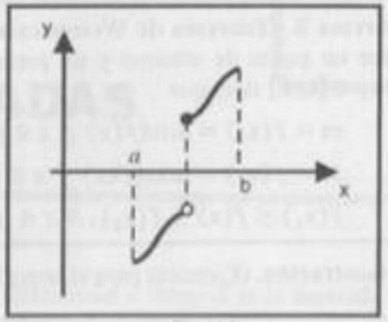


Fig. 4.7

Teorema 5. (De la acotación global)

Si f es continua en $[a; b]$, entonces f es acotada en $[a; b]$

(La demostración queda como ejercicio para el lector).

En el siguiente ejemplo, se muestra que si f no es continua en $[a; b]$, la función no necesariamente es acotada.

Ejemplo 17 Sea $f: [0; 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3 - x}, & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

f no es continua en $[0; 3]$ y f no es acotada. Su gráfica se muestra en la Fig. 4.8.

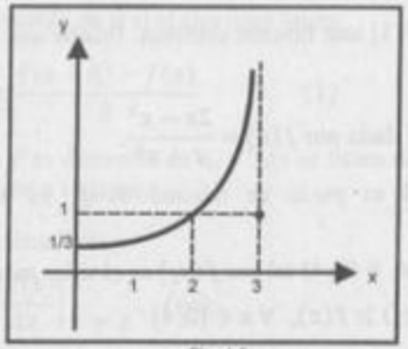


Fig. 4.8

www.FreeLibros.com

Teorema 6. (Teorema de Weierstrass) Si f es continua en $[a;b]$, entonces f posee un punto de mínimo y un punto de máximo en $[a;b]$, esto es, existen $x_1, x_2 \in [a;b]$ tales que

$$m = f(x_1) = \min\{f(x) \ / \ x \in [a;b]\}$$
$$M = f(x_2) = \max\{f(x) \ / \ x \in [a;b]\}$$
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \ \forall x \in [a;b]$$

Demostración. (Ejercicio para el lector)

Teorema 7. (Teorema del Valor Intermedio) Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua, m y M, el mínimo y máximo de f en $[a;b]$, respectivamente. Si $m < d < M$, entonces existe $c \in \langle a;b \rangle$ tal que $f(c) = d$.

Demostración. (Ejercicio para el lector)

EJERCICIOS

1) Indique un ejemplo de una función definida en $[0;1]$ que no tenga máximo ni mínimo en dicho intervalo.

2) Sea $f(x) = x^4 - 5x + 3$, localice un intervalo $[a;b]$ en donde f tiene una única raíz real. Justifique su respuesta.

3) Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, halle el valor que satisface el teorema del valor intermedio para $d = 3$, en $[1;6]$.

4) Pruebe que el polinomio $P(x) = 4x^4 - 14x^2 + 14x - 3$ tiene 3 raíces reales diferentes.

5) Sea $f: [0;1] \to [0;1]$ una función continua. Pruebe que existe $c \in [0;1]$ tal que $f(c) = c$.

6) Sea $f: [0;4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x + x^2}$.

   a) Pruebe que 4 es punto de mínimo de f, es decir, $f(4) \leq f(x)$, $\forall x \in [0;4]$.

   b) Pruebe que $\exists\, x_2 \in \langle 0;4 \rangle$ tal que $f(x_2)$ es el valor máximo de f, es decir

   $$f(x_2) \geq f(x), \ \forall x \in [0;4]$$

7) Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no constante en $[a;b]$. Pruebe que $\mathrm{Img}(f) = [m;M]$, donde $m = \min f$ y $M = \max f$ en $[a;b]$.

www.FreeLibros.com

5 DERIVADAS

5.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral es la derivada de una función.

En general, la Ciencia tuvo un gran impulso en su desarrollo por la necesidad de entender nuestro entorno. Los problemas que propiciaron el concepto de derivada fueron:

- Determinar la ecuación de la recta tangente a una curva dada en un punto dado.
- Dada la ley del movimiento de una partícula a lo largo de a una recta, esto es, si $s = f(t)$ es la ecuación que da la posición de la partícula sobre la recta en cada instante t, determinar la velocidad de la partícula en el instante t.

Al inicio, las definiciones no tenían precisión. En 1629, Pierre de Fermat hace un trabajo inicial sobre el primer problema, encontrando una manera de construir tangentes a una parábola, y que contenía implícitamente la idea de derivada. Más tarde, se ve que los dos problemas tenían algo en común y que la idea general para resolverlos llevaría a la noción de la derivada de una función en un punto.

5.2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el punto $a \in D_f$.
Se dice que f es **derivable en a** si el siguiente límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

existe. Si la función f es derivable en a, $f'(a)$ se llama **derivada de f en a**. La notación $f'(a)$ se debe a Lagrange.

También se usan las notaciones:

$$D_x f(a), \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}, \quad \dot{f}(a)$$

y éstas se deben a Cauchy, Leibniz y Newton, respectivamente.

Observación 1. *La forma equivalente de (1) es*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ejemplo 1. Halle la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

Solución

Por definición, $f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$

Definición 2 (Función derivada)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. La función f' está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

Si este límite existe, se denomina **función derivada de *f*** o simplemente **derivada de *f*.**

El dominio de la función derivada de f es $D_{f'} = \{x \in D_f \,/\, f'(x) \text{ existe}\}$.

Por otro lado, las notaciones más comunes para la derivada de $y = f(x)$ son

$$f'(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx},\ y',\ D_x f(x),\ \dot{f}(x)$$

Al símbolo $\frac{df(x)}{dx}$ se lee "**derivada de $f(x)$ con respecto a x**".

Ejemplo 2. (Derivada de la función constante) Pruebe que $f(x) = k$ k constante, es derivable y $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3. (Derivada de la función afín) Pruebe que la derivada de la función $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ es $f'(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = a$$

Así, la derivada de la función afín es $f'(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Pruebe que si $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ es una constante), entonces f es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = nx^{n-1}$.

Solución

En esta demostración asumiremos que $n \geq 2$ (para $n = 1$ se verifica fácilmente).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h) - x][(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] = nx^{n-1}$$

Ejemplo 5. (Función que no es derivable en un punto) Pruebe que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Solución

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

y este límite no existe, pues $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

5.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Consideremos una función f derivable en a, $P(a; f(a))$ el punto de tangencia y $Q_h(a+h; f(a+h))$ otro punto sobre la gráfica de f (Fig. 5.1). La pendiente de la recta secante $\overline{PQ_h}$ es

$$m_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

www.FreeLibros.com

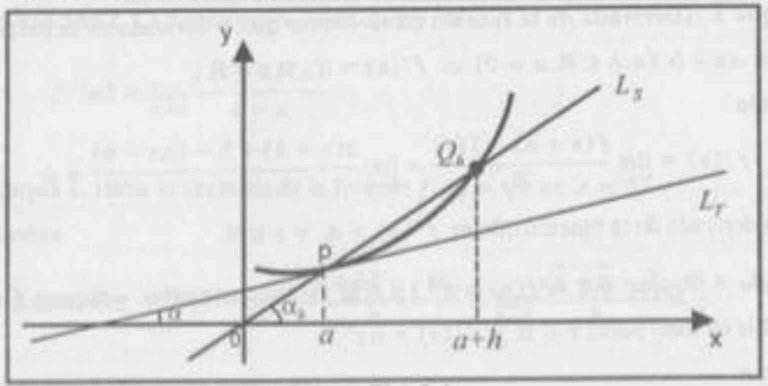


Fig. 5.1

Se observa en el gráfico que cuando $h \to 0$, el punto Q_h varía sobre la gráfica tendiendo hacia P. Esto significa que los ángulos de inclinación α_h se aproximan al ángulo α, donde α es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P. Luego, las pendientes de las rectas secantes $\overline{PQ_h}$ tienden a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P.

Más concretamente,

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_T = f'(a)$$

Por tanto, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(a; f(a))$.

5.4 DERIVADAS LATERALES

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in D_f$.

Definición 3. **La derivada por la izquierda** de f en a es definida y denotada por

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si el límite existe.

Definición 4. **La derivada por la derecha** de f en a es definida y denotada por

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si este límite existe.

Proposición 1. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $a \in D_f$ si y solo si existen y son iguales $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Proposición 2. Si una función f es derivable en el punto a, entonces es continua en a.

Demostración

Para demostrar que f es continua en a tenemos que probar

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como f es derivable en a, entonces

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe}$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Luego, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Por lo tanto, f es continua en a. En resumen, derivabilidad implica continuidad.

Observación 2. *El recíproco de la proposición 2 no siempre es verdadero.*

Ejemplo 6. Analice la derivabilidad de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}, \text{ en el punto } x = 2.$$

La gráfica de esta función se muestra en la Fig. 5.2

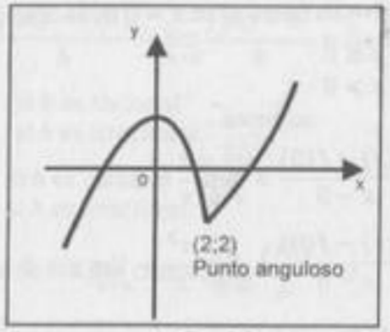


Fig. 5.2

www.FreeLibros.com

Solución

Se demuestra fácilmente que f es continua en $x = 2$; sin embargo, f no es derivable en $x = 2$, pues

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -4 \neq f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$$

Observación 3. *Para hallar las derivadas laterales de las funciones definidas seccionalmente en los puntos donde la función cambia de regla de correspondencia, es útil tener en cuenta las propiedades siguientes:*

1. *Si f es derivable para $x < a$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ y existe $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = L$, entonces $f'(a^-) = L$.*
2. *Si f es derivable para $x > a$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y existe $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = L$, entonces $f'(a^+) = L$.*

Ejemplo 7. Si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ ax + b, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, encuentre los valores de a y b para que $f'(1)$ exista.

Solución

Considerando que $f'(1)$ existe, entonces f es continua en $x = 1$. Luego, se tiene

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, de donde se obtiene que $1 = a + b$.

Por otro lado, como $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 1 \\ a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, por la observación 3, obtenemos

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2 \;\text{ y }\; f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = a$$

Como $f'(1)$ existe, entonces $a = 2$. Finalmente, de $a + b = 1$ se concluye que $b = -1$

Ejemplo 8. Calcule las derivadas laterales en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Esta función no es derivable en $x = 0$, pero es continua en $x = 0$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 9. ¿La función definida por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$?

Solución

Considerando la proposición 2 (derivabilidad implica continuidad), se deduce: "Si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a". En este ejemplo, f es discontinua en $x = 0$. Luego, f no es derivable en $x = 0$.

Ejemplo 10. Sean f, g dos funciones de tal manera que $f(a) = g(a)$ y $f'(a^-) = g'(a^+)$. Demuestre que la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq a \\ g(x), & \text{si } x > a \end{cases}$$

es derivable en $x = a$.

Solución

Como la función h está definida antes y después de a, probaremos que es derivable en a mediante derivadas laterales en a, esto es,

$$h'(a^-) = \lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)$$

$$h'(a^+) = \lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a^+)$$

Como $f'(a^-) = g'(a^+)$, entonces $h'(a^-) = h'(a^+)$. Luego, h es derivable en a.

Ejemplo 11. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Demuestre que f es derivable en $x = 0$.

Solución

De la definición de derivada en el punto $x = 0$, se tiene

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

Como $f(h) = \begin{cases} h^2, & \text{si } h \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } h \text{ es irracional} \end{cases}$, entonces

$$\frac{f(h)}{h} = \begin{cases} h, & \text{si } h \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } h \text{ es irracional} \end{cases}$$

Luego, en cualquiera de los dos casos, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0$.

Por tanto, $f'(0) = 0$.

5.5 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x = a$. Considerando la interpretación geométrica de $f'(a)$, se tiene las siguientes definiciones:

Definición 5. (Recta tangente) Se llama recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a; f(a))$ a la recta (Fig. 5.3) cuya ecuación es

$$L_T: y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

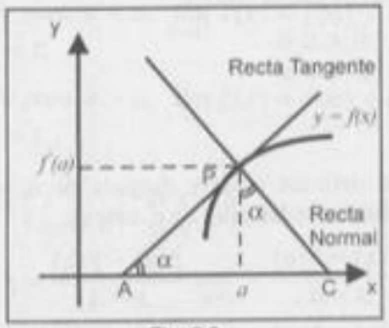


Fig. 5.3

Definición 6. (Recta normal) La recta que pasa por el punto $P(a; f(a))$ y que es perpendicular a la recta tangente de la gráfica de f en P es llamada recta normal a la gráfica de f en el punto P (Fig. 5.3).

Si $f'(a) \neq 0$, la ecuación de la recta normal es $L_N: y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$.

Si $f'(a) = 0$, la ecuación de la recta normal es L_N: $x - a = 0$.

Ejemplo 12. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 3$, halle las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto $P(2; 3)$.

Solución

La pendiente de la recta tangente es

$$m_T = f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 2) = 2$$

Luego, las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto $P(2; 3)$ son

$$L_T: y - 3 = 2(x - 2) \Leftrightarrow L_T: 2x - y - 1 = 0$$

$$L_N: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow L_N: x + 2y - 8 = 0$$

Ejemplo 13. Sea $f(x) = 2 - x - x^2$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $L: x - y - 4 = 0$.

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(-1 - 2x - h) = -1 - 2x$$

Como la recta L de pendiente $m_L = 1$ es paralela a la recta tangente, entonces

$$m_T = f'(x) = -1 - 2x = m_L = 1, \text{ de donde se obtiene que } x = -1.$$

Así, el punto de tangencia es $P(-1; f(-1)) = P(-1; 2)$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es L_T: $x - y + 3 = 0$.

Ejemplo 14. Dada $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$, determine las ecuaciones de las tangentes horizontales a la gráfica de f.

Solución

La tangente es horizontal si $f'(x) = 0$.

Por otro lado, es fácil verificar que $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x - 2)(x + 3)$.

Luego, $f'(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \lor x = -3$

Por tanto, en los puntos $P(2; -43)$ y $Q(-3; 82)$ las tangentes de f son horizontales y sus ecuaciones son, respectivamente:

$$L_T: y = -43 \ \land \ L_T: y = 82$$

Ejemplo 15. La recta L es normal a la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ en $Q(a; f(a))$. Si L pasa por el punto $P(33; 0)$, determine Q y la ecuación de L.

Solución

Como $f'(x) = 2x$, la pendiente m_T de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $Q(a; f(a))$ es $m_T = f'(a) = 2a$

Por otro lado, la pendiente de la recta L que pasa por los puntos $P(33; 0)$ y $Q(a; f(a))$ es

$$m_L = \frac{f(a) - 0}{a - 33} = \frac{a^2 - 4}{a - 33}$$

Teniendo en cuenta que L es perpendicular a la recta tangente, entonces

$$m_L = -\frac{1}{f'(a)} \Rightarrow 2a^3 - 7a - 33 = 0 \Rightarrow (a - 3)(2a^2 + 6a + 11) = 0$$

En consecuencia, $a = 3$ es la única raíz real de la ecuación.

Por tanto, $Q(3; 5)$ y $L: x + 6y - 33 = 0$.

www.FreeLibros.com

5.6 REGLAS DE DERIVACIÓN

Teorema 1. Sean f y g dos funciones derivables en x y sea k una constante. Entonces, las funciones kf, $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en x, y se tiene:

D_1: $(kf)'(x) = k[f'(x)]$

D_2: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

D_3: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

D_4: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$, si $g(x) \neq 0$

D_5: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, si $g(x) \neq 0$

Demostración

(Se demostrará que el teorema es válido para $x = a$.)

$$D_1: (kf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{kf(x) - kf(a)}{x-a}$$

$$= k \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k[f'(a)]$$

D_2: Ejercicio.

D_3: Como f y g son derivables en a, entonces son continuas en a. En particular, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ y

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right]$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

D_4: Como g es derivable en a y $g(a) \neq 0$, entonces, por el teorema de conservación de signo, existe $B(a;r)$ tal que para todo $x \in B(a;r)$, $g(x) \neq 0$ y tiene el mismo signo que $g(a)$.

Luego, para $x \in B(a;r)$ se tiene:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} -\left[\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right]\left[\frac{1}{g(a)g(x)}\right] = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

D_5: Como $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ y f y g son derivables en a, entonces $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a. Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a)\left[-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\right]$$

$$= \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Teorema 2 Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones derivables en x, entonces

D_6: $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es derivable en x y

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

D_7: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n$ es derivable en x y

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) \ldots f_n(x) + \ldots$$
$$\ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_{n-1}(a) \cdot f_n'(x)$$

Ejemplo 16. Dada $f(x) = 5x^5 + x^4 - 3x^3 + 1$, calcule

a) $f'(x)$ b) $f'(1)$

Solución

a) $f'(x) = (5x^5)' + (x^4)' - (3x^3)' + (1)'$

$= 5(x^5)' + 4x^3 - 3(x^3)' + 0 = 25x^4 + 4x^3 - 9x^2$

b) $f'(1) = 25(1)^4 + 4(1)^3 - 9(1)^2 = 20$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 17. Si $f(x) = (x^2 + x + 1)x^3$, calcule $f'(x)$.

Solución

Usando las propiedades D_2 y D_6, se tiene

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)(x^3)' + (x^2 + x + 1)'x^3$$
$$= (x^2 + x + 1)3x^2 + (2x + 1)x^3 = x^2(5x^2 + 4x + 3)$$

Ejemplo 18. Si $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$, calcule $(f + g)'(x)$.

Solución

Como $f(x) = x$ y $g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, entonces

$f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (g no es derivable en $x = 0$)

Luego, $(f + g)'(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ejemplo 19. Dada $f(x) = x^{-n}$, $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, calcule $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}, \ \forall x \in (\mathbb{R} - \{0\}).$$

Observación 4.

i) *Si $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}$, de los ejemplos 4 y 19 se deduce que* $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

ii) *En general, si c es una constante y $f(x) = x^c$, entonces* $f'(x) = cx^{c-1}$

Por ejemplo, si $f(x) = x^{1/3}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.

Ejemplo 20. Dada $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$, $x \neq 2$, calcule $f'(x)$.

Solución

Aplicando D_5 para $x \neq 2$, tenemos

$$f'(x) = \frac{(2-x)(x+3)' - (x+3)(2-x)'}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{(2-x)(1) - (x+3)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2}$$

Ejemplo 21. Dada $f(x) = \dfrac{ax^5 + bx^4 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, halle $f'(x)$.

Solución

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ax^5 + bx^4 + c)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ax^5 + bx^4 + c)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(5ax^4 + 4bx^3)$$

5.7 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

LEMA 1. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en a, entonces existe una función $N(h)$ tal que $f(a + h) - f(a) = hf'(a) + hN(h), \forall\, (a + h) \in D_f$, con $\lim_{h \to 0} N(h) = 0 = N(0)$.

Demostración

Como f es derivable en a, se tiene $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Luego, $\lim_{h \to 0} \left[\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right] = 0$.

Definiendo $N(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & \text{si } h \neq 0 \\ 0, & \text{si } h = 0 \end{cases}$,

se cumple para $h \neq 0$:

$$hN(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) \quad \text{o}$$
$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + hN(h)$$

Esta igualdad es válida para todo $(a + h) \in D_f$ (inclusive para $h = 0$) y se tiene:

$$\lim_{h \to 0} N(h) = 0 = N(0)$$

Teorema 3 (Regla de la cadena) Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones con $Im(f) \subset B$. Si f es derivable en $a \in D_f$ y g es derivable en $b = f(a) \in B$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y se cumple

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

www.FreeLibros.com

Demostración.

Como g es derivable en $b = f(a)$, por el lema 1, existe una función $N(k)$ tal que

$$g(b+k) - g(b) = kg'(b) + kN(k), \text{ con } \lim_{k\to 0} N(k) = 0 = N(0) \qquad (1)$$

Como $Imf \subset B$, se puede tomar $b = f(a)$ y $b + k = f(a+h) \in \text{Imf}$.

Reemplazando estos valores en (1) y dividiendo entre $h \neq 0$, se tiene

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(f(a))\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}N(k) \qquad (2)$$

Considerando que f es derivable en a y, por ende, continua en a, se tiene:

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = 0$$

Puesto que N es continua en $k = 0$, entonces, por el teorema del límite de una función compuesta, tenemos

$$\lim_{h\to 0} N(k) = N(\lim_{h\to 0} k) = N(0) = 0$$

Tomando límite a (2) cuando $h \to 0$, se obtiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[g'(f(a))\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + N(k)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

$$= g'(f(a))\cdot f'(a) + 0\cdot[f'(a)] = g'(f(a))\cdot f'(a)$$

Por tanto, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$

Corolario. Sea f es una función derivable en a y $h(x) = [f(x)]^n$ (n es una constante), entonces h es derivable en a y $h'(a) = n[f(a)]^{n-1}f'(a)$.

Demostración

Sea $h(x) = (g \circ f)(x) = [f(x)]^n$, donde $g(x) = x^n$.

Como $g'(x) = nx^{n-1}$, entonces $g'(f(a)) = n[f(a)]^{n-1}$

Por lo tanto, por el teorema 3, se tiene

$$h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a) = n[f(a)]^{n-1}\cdot f'(a)$$

www.FreeLibros.com

Observación 5. *De los resultados obtenidos, se tiene*

i) *Si* $y = y(t) \wedge t = t(x)$ *son dos funciones derivables, entonces*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}, \text{ donde } \frac{dy}{dt} = y'(t) \wedge \frac{dt}{dx} = t'(x)$$

ii) *Si* $y = f(x)$ *es una función derivable y tiene inversa* $x = f^{-1}(y)$, *entonces*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ si } \frac{dy}{dx} \neq 0$$

iii) *Si* $y = y(t) \wedge x = x(t)$ *son dos funciones derivables, entonces*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

iv) *Si* $f(x) = [u(x)]^n$ y $u(x)$ *es derivable, entonces*

$$f'(x) = n[u(x)]^{n-1}\cdot u'(x) \quad \textbf{(Regla general de las potencias)}$$

v) *Si* $f(x) = \sqrt{u(x)}$ y $u(x)$ *es derivable con* $u(x) > 0$, *entonces*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

vi) *Si* $f(x) = |u(x)|$ y $u(x)$ *es derivable con* $u(x) \neq 0$, *entonces*

$$f'(x) = \frac{u(x)}{|u(x)|}\cdot u'(x)$$

Ejemplo 22. Si $f(x) = (x^4+1)^3$ y $g(x) = (x^3+12x-4)^{200}$, halle

a) $f'(x)$ b) $g'(x)$

Solución

Aplicando la regla general de potencias, se tiene

a) $f'(x) = 3(x^4+1)^2(x^4+1)' = 3(x^4+1)^2(4x^3) = 12x^3(x^4+1)^2$

b) $g'(x) = 200(x^3+12x-4)^{199}(x^3+12x-4)'$

$= 600(x^2+4)(x^3+12x-4)^{199}$

Ejemplo 23. Si $y = x^4 - x^2 + x \wedge x = (t^2+1)^4$, halle $\frac{dy}{dt}$.

Solución

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = (4x^3 - 2x + 1)[4(t^2+1)^3 2t] = 8t(t^2+1)^3(4x^3 - 2x + 1)$$

Ejemplo 24. Si $f(x) = \left[\frac{x+2}{x-2}\right]^{16}$, halle $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = 16\left[\frac{x+2}{x-2}\right]^{15}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)'$$

$$= 16\left[\frac{x+2}{x-2}\right]^{15}\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = -\frac{64(x+2)^{15}}{(x-2)^{17}}$$

Ejemplo 25. Si $f(x) = \sqrt[5]{(5x^2-3x+2)^3}$, determine $f'(x)$.

Solución

Se tiene $f(x) = (5x^2-3x+2)^{3/5}$. Luego,

$$f'(x) = \frac{3}{5}(5x^2-3x+2)^{-\frac{2}{5}}(5x^2-3x+2)' = \frac{3(10x-3)}{5\sqrt[5]{(5x^2-3x+2)^2}}$$

Ejemplo 26. Sean $f(x) = \sqrt[5]{\frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}}$ y $g(x) = (x^2-4)\sqrt{x^2+4}$.

Halle: a) $f'(x)$ b) $g'(x)$ c) $g'(0)$

Solución

a) $$f(x) = \left[\frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}\right]^{1/5} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}\left[\frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}\right]^{-\frac{4}{5}}\left(\frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}\right)^{-4/5}\left(\frac{ax^2-8a^2x+12a^3}{(x-4a)^2}\right)$$

$$= \frac{a(x-6a)(x-2a)}{5(x-4a)^2}\sqrt[5]{\left(\frac{x-4a}{ax^2-3a^2x}\right)^4}$$

b) $$g(x) = (x^2-4)(x^2+4)^{1/2}$$

$$g'(x) = (x^2-4)\tfrac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}(2x) + (x^2+4)^{1/2}.2x = \frac{x(3x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}$$

c) $g'(0) = 0$

Ejemplo 27. Dada $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $|x| < 2$, calcular $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}(2x) - x^2\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{4-x^2} = \frac{8x-x^3}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$

Ejemplo 28. Dada $f(x) = \sqrt{5+|3x^2-8|}$, hallar $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{(5+|3x^2-8|)'}{2\sqrt{5+|3x^2-8|}} = \frac{1}{2\sqrt{5+|3x^2-8|}}\left(\frac{3x^2-8}{|3x^2-8|}\cdot(3x^2-8)'\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5+|3x^2-8|}}\left(\frac{3x^2-8}{|3x^2-8|}(6x)\right) = \frac{3x(3x^2-8)}{|3x^2-8|\sqrt{5+|3x^2-8|}}$$

Ejemplo 29. Halle $g'(4)$, si $f(x+1) = 2x^2+8$ y $g(x+1) = f(x-2)$.

Solución

Si $z = x+1$, entonces $x = z-1$ y $f(z) = 2(z-1)^2+8$.

Luego, $f'(z) = 4(z-1)$.

Por otro lado, aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$g'(x+1) = f'(x-2)$$

Finalmente, evaluando en $x = 3$, obtenemos

$$g'(4) = f'(1) = 4(1-1) = 0$$

Ejemplo 30. Si $f'(x) = \frac{x}{x-1} \wedge y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, halle $\frac{dy}{dx}$.

Solución

Sean $z = \frac{x-1}{x+1} \wedge y = f(z)$, entonces, por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = f'(z)\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}$$

Reemplazando z por $\frac{x-1}{x+1}$, se obtiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{(x+1)^2}$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 31. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } |x| \leq 2 \\ x^2 - 4, & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

a) ¿f es continua en los puntos $x = 2$ y $x = -2$?

b) Calcule $f'(-2^-)$, $f'(-2^+)$, $f'(2^-)$, $f'(2^+)$.

c) Halle $f'(x)$ y obtenga su dominio.

d) Trace la gráfica de f.

Solución

a) f es continua en $x = -2$ y $x = 2$, pues

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2) \ \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 = f(2)$$

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x < 2 \\ 2x, & x < -2 \lor x > 2 \end{cases}$

Como $\lim_{x \to -2^+} f'(x) = 4$, $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -4$, $\lim_{x \to -2^-} f'(x) = -4$ y $\lim_{x \to 2^+} f'(x) = 4$, y considerando la continuidad de f en $x = -2$, por la observación 3, se concluye que

$$f'(-2^+) = 4, \ f'(2^-) = -4, \ f'(-2^-) = -4 \ \text{ y } \ f'(2^+) = 4$$

Teniendo en cuenta que las derivadas laterales en $x = -2$ y en $x = 2$ son diferentes, entonces se concluye que f no es derivable en $x = -2$ y en $x = 2$.

c) $f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } |x| < 2 \\ 2x, & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$

d) La gráfica se muestra en la figura 5.4.

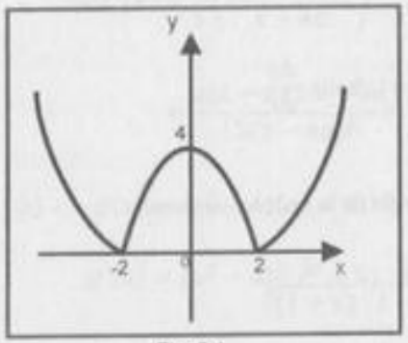


Fig. 5.4

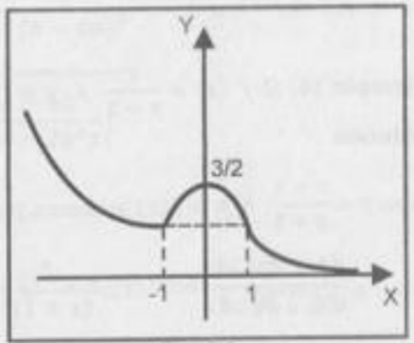


Fig. 5.5

Ejemplo 32. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Verifique si f es continua en $x = -1$ y $x = 1$.

b) Calcule $f'(-1^-)$, $f'(-1^+)$, $f'(1^-)$, $f'(1^+)$.

c) Halle $f'(x)$ e indique su dominio.

Solución

a) Se verifica fácilmente que f es continua en $x = -1$ y en $x = 1$, pues

$$f(-1) = 1 = \lim_{x \to -1} f(x) \ \text{ y } \ f(1) = 1 = \lim_{x \to 1} f(x)$$

b) Para $x \neq -1$ y $x \neq 1$, se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < -1 \\ -x, & -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$, debemos analizar las derivadas laterales. Por la continuidad de f en dichos puntos y por la indicación dada en la observación 3, para hallar las derivadas laterales en los puntos mencionados, es suficiente tomar los límites laterales en $f'(x)$.

Como $f'(-1^-) = -3$ y $f'(-1^+) = 1$, f no es derivable en $x = -1$.

Puesto que $f'(1^+) = -1$ y $f'(1^-) = -1$, f es derivable en $x = 1$.

c) Por lo tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < -1 \\ -x, & -1 < x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Su dominio es $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

d) La gráfica se muestra en la figura 5.5.

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, aplique la definición de la derivada en un punto y calcule $f'(a)$.

1) $f(x) = 5x - 3$, $a = 2$ R. 5

2) $f(x) = 8 - 2x^3$, $a = -1$ R. -6

3) $f(x) = \sqrt{4 + 2x}$, $a = 0$ R. 0.5

4) $f(x) = \dfrac{1}{11\sqrt{5 + 11x}}$, $a = 1$ R. $-1/128$

5) $f(x) = |x - 1|^3$, $a = 1$ R. 0

En cada uno de los ejercicios siguientes, aplicando la definición, halle $f'(x)$ e indique su dominio $D_{f'}$.

1) $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$ R. $6x - 2$, $D_{f'} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 - 4x$ R. $3x^2 - 4$, $D_{f'} = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$ R. $-\dfrac{13}{(3x - 2)^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{2/3\}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$ R. $\dfrac{2}{(2 - x)^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{2\}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ R. $-\dfrac{1}{2(x + 2)^{-3/2}}$, $D_{f'} = (-2; +\infty)$

6) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ R. $-\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$, $D_{f'} = (-3; 3)$

En los siguientes ejercicios, determine si la función dada es derivable en el punto a.

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \leq -4 \\ -x - 6, & \text{si } x > -4 \end{cases}$, $a = -4$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, $a = 2$

3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, & \text{si } x < 1 \\ (1 - x)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $a = 1$

4) $f(x) = |x^2 - 9|$, $a = 3$ y $a = -3$

5) $f(x) = \begin{cases} |x + 2|, & x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$, $a = 0$ y $a = 2$

En cada uno de los siguientes ejercicios, halle la derivada de las funciones dadas.

1) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ R. $-\dfrac{12}{x^5}$

2) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ R. $\dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2}$

3) $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ R. $\dfrac{3x + 5}{3(x + 1)}\sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

4) $f(x) = (5 - x)\sqrt[7]{(x + 5)^6}$ R. $-\sqrt[7]{(x + 5)^6} + \dfrac{6(5 - x)}{7\sqrt[7]{x + 5}}$

5) $f(x) = (\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1})^4$ R. $\dfrac{2(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1})^4}{\sqrt{x^2 - 1}}$

6) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1 - x^2)^{3/2}}$ R. $\dfrac{3x^2}{(1 - x^2)^{5/2}}$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{(1 + x^2)^3}}$ R. $\dfrac{2x^3 - 13x}{(4 - x^2)^{1/2}(1 + x^2)^{5/2}}$

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$ R. $-\dfrac{1}{x^2}\left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$

9) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{2}{x}}$ R. $\dfrac{x - 1}{x\sqrt{2x}}$

10) $f(x) = x\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ R. $\dfrac{2x^4 - 3a^2x^2 + 2a^4}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$

11) $f(x) = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$ R. $\dfrac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$

12) $f(x) = |x^2 - 9|$ R. $\dfrac{2x(x^2 - 9)}{|x^2 - 9|}$

13) $f(x) = x^2|x|^3$ R. $5x^3|x|$

14) $f(x) = (x^3 - |x|^3)^{2/3}$ R. $\dfrac{2x(x - |x|)}{\sqrt[3]{x^3 - |x|^3}}$

15) $f(x) = \dfrac{1}{8}(1 + x^3)^{8/3} - \dfrac{1}{5}(1 + x^3)^{5/3}$ R. $x^5(1 + x^3)^{2/3}$

www.FreeLibros.com

16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ R. $\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$

17) $f(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ R. $\dfrac{7}{(x^2+3x+4)^{3/2}}$

18) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$ R. $\dfrac{x(1-x^2)}{|x|(1+x^2)^2}$

En los siguientes ejercicios, halle $f'(x)$ y determine su dominio $D_{f'}$.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 2x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \ge 0 \\ x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & \text{si } x < -2 \\ x^2+4x+5, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 5-x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} -x^2-6x-134, & x \le -3 \\ x^3-6x^2+12x-8, & -3 < x < 3 \\ 6x-x^2-8, & 3 \le x < 5 \\ x-8, & x \ge 5 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \le 0 \\ |x-2|, & x > 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} (x-5)^{1/3}(x+4)^{2/3}, & \text{si } x \le -4 \\ \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}, & \text{si } -4 < x \le -1 \\ (x+1)^{1/5}(x-2)^{4/5}, & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x^2-8x+12}{x^2+1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{2x+2}{2x+1}\right]\!\right] + \dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3-3x^2-x+3}, & \text{si } x \le -3 \\ (x+3)^{1/5}(x-1)^{2/5}, & \text{si } -3 < x \le 1 \\ (x-1)^3(x-5)^{4/7}, & \text{si } 1 < x \le 5 \\ \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+6x+5}, & \text{si } x > 5 \end{cases}$

En el siguiente grupo de ejercicios, halle $f'(a)$ y las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = a$.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, $a = 64$ R. 1/12

2) $f(x) = \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2}$, $a = 4$ R. 5/6

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{16+3x}}{x}$, $a = 3$ R. $-41/90$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-2x}}{2x+1}$, $a = \dfrac{1}{2}$ R. $-5/4$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-5}{10-x^2}}$, $a = 3$ R. 15/2

6) $f(x) = \sqrt[3]{5x+12}(x^2+6)^2$, $a = 3$ R. $(581)^{2/3}$

PROBLEMAS

1) Determine c y d para que la función f sea derivable en $x = 2$.

$f(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{si } x \le 2 \\ cx+d, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ R. $c = -12$, $d = 12$

2) Dada $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+2x}}{x}$, halle $(x+2)f(2) + 6xf'(2)$. R. $3 - 2x$

3) Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-8x}}{\sqrt[3]{2x-7}}$, determine los valores de m si

$(m^2+4)f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 12mf'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

R. $m = -3 \lor m = -4/3$

4) Si $k \neq 0$, determine los valores de A, B y C de modo que:

a) $f(x) = (Ax^2 + Bkx + Ck^2)(k-x)^{3/2}$ y $f'(x) = \sqrt{k-x}\,(k^2+x^2)$

b) $f(x) = (Ax^2 - Bkx + Ck^2)(k-x)^{\frac{5}{2}}$ y $f'(x) = (k-x)^{\frac{3}{2}}(k^2+x^2)$

R. $A = -2/9$, $B = 8/63$, $C = -142/315$

5) Halle $g'(5)$ si

$f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[4]{16(x^2+1)}$ y $f(x^2-2) = g(x^2+1)$

R. 4/3

www.FreeLibros.com

6) Dadas $f(x) = x^3$ y $g(x) = f(x^2)$, halle: a) $f'(x^2)$ b) $g'(x)$

R. a) $3x^4$ b) $6x^5$

7) Si $f(2x-1) = 4x^2 - 1$ y $g(2x) = f(2x+1)$, halle $g'(x-2)$.

R. $2x$

8) Si $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\wedge$ $y = f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, halle $\dfrac{dy}{dx}$.

9) Halle la derivada de $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ respecto de $\dfrac{x}{x-1}$ en $x = 3$.

R. $-12/5$

10) Halle la derivada de $\sqrt{x^2-2x}$ respecto de $\dfrac{x}{x-1}$.

R. $-(x-1)^3(x^2-2x)^{-1/2}$

11) Si $f(x) = [\![x]\!]$, determine f' y su dominio.

R. $f'(x) = 0$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

12) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función derivable, si c es constante, demuestre que:

a) Si $g(x) = f(x+c)$, entonces $g'(x) = f'(x+c)$.

b) Si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = cf'(cx)$.

13) Si f y g son derivables en a, demostrar que $máx(f,g)$ y $mín(f,g)$ son derivables en a, siempre que $f(a) \neq g(a)$.
Indique un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

14) Determine las ecuaciones de la tangente y de la normal a la gráfica de f en el punto cuya abscisa es a, si

a) $f(x) = (2 - 3x + x^3)\sqrt{1+x^2}$, $a = 0$

R. $L_T: 3x + y - 8 = 0$, $L_N: x - 3y + 4 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{10-x^2}}{(x^2+2)^3}$, $a = 1$

R. $L_T: 19x + 81y - 28 = 0$, $L_N: 729x - 171y - 710 = 0$

15) Si $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 12x + 10$, determine los puntos sobre la gráfica de $y = f(x)$ de tal manera que la recta tangente en dichos puntos sea paralela a la recta $12x + y - 5 = 0$. Además, halle las ecuaciones de las respectivas rectas tangentes.

R. $y = -12x + 10$, $y = -12x + 7$, $y = -12x - 118$

16) Halle la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^2 + x + 1$, sabiendo que dicha recta pasa por $P(37; 0)$.

R. $x + 5y - 37 = 0$

17) Determine los puntos de la curva $y = x^3 - x + 1$ de modo que la tangente a la curva en dichos puntos sea perpendicular a la recta $x + 2y - 12 = 0$. Además, obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

R. $2x - y + 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$

18) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(0; 2)$ y es tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 5x + 6$.

R. $y = x + 2$

19) Si $f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x - 16$, determine todos los puntos sobre la curva $y = f(x)$ de tal manera que la recta tangente en dichos puntos sea paralela al eje x.

R. $(1; 1)$, $(-2; -80)$ y $(4; 80)$

20) Determine los valores de a, b y c de modo que

a) $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^2 + cx$ tienen la misma recta tangente en el punto $(2; 2)$

R. $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$

b) $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se intersecan en $(1; 2)$ y tienen la misma tangente en dicho punto.

R. $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$

21) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $g(x) = \dfrac{x^2+4}{4}$ que pasa por el punto $\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$.

R. $2x + 4y - 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$

22) Sea $f(x) = x^2 + ax + b$, halle los valores de a y b de modo que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en $(2; 4)$.

23) Sea $f(x) = x - x^3$, $x \in [-2; 2]$. Halle las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1; 0)$. Si una segunda recta que pasa por $(-1; 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto $(a; c)$, determine las coordenadas a y c.

R. $m = -2$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$

www.FreeLibros.com

5.8 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $y = f(x)$ una función derivable, la derivada de la función $f'(x)$ se denomina segunda derivada de f, y es indicada con una de las notaciones

$$f''(x)\,,\ D_x^2 f(x)\,,\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,,\ \ddot{f}(x)\,,\ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Si $f''(x_0)$ existe, se dice que f es dos veces derivable en x_0 y el número $f''(x_0)$ se denomina segunda derivada de f en x_0.

Si $f''(x)$ es una función derivable, su derivada $(f'')'$, (derivada de la segunda derivada) se denomina tercera derivada de f y se denota con uno de los símbolos

$$f'''(x)\,,\ D_x^3 f(x)\,,\ \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\,,\ \frac{d^3 y}{dx^3}$$

De esta manera, derivando sucesivamente la función f (siempre que sea posible), se obtiene la n-ésima derivada o derivada de orden n de f y se indica con una de las notaciones

$$f^{(n)}(x)\,,\ D_x^n f(x)\,,\ \frac{d^n f(x)}{dx^n}\,,\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

Proposición 3 (Fórmula de Leibniz). Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son definidas y derivables hasta el orden n en el mismo conjunto A. Entonces, $y = u \cdot v$ es derivable hasta el orden n en A y se tiene:

$$y^{(n)} = (u'.v + u.v')^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}.v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}.v' + \ldots +$$
$$+\binom{n}{k}u^{(n-k)}.v^{(k)} + \ldots + \binom{n}{n}u.v^{(n)}$$

(En esta fórmula se entiende que $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v,\ u^{(1)} = u',\ u^{(2)} = u''$, etc.)

Demostración.

Se demostrará por inducción. Para $n = 1$, la propiedad es verdadera, pues

$$y^{(1)} = y' = u'.v + u \cdot v' = (u'.v + u.v')^{(1)} = \binom{1}{0}u^{(1)}.v + \binom{1}{1}u^{(0)}.v^{(\ )}$$

Supongamos que es verdadero para $n = p$, esto es,

$$y^{(p)} = (u'.v + u.v')^p$$
$$= \binom{p}{0}u^{(p)}.v + \binom{p}{1}u^{(p-1)}.v' + \cdots + \binom{p}{k}u^{(p-k)}.v^k + \ \ldots + \binom{p}{p}u.v^{(p)}$$

Probaremos que para $n = p + 1$, la propiedad es verdadera. En efecto,

$$y^{(p+1)} = (y^{(p)})' = \binom{p}{0}u^{(p+1)}.v + \binom{p}{0}u^{(p)}.v' + \binom{p}{1}u^{(p)}.v' + \binom{p}{1}u^{(p-1)}.v'' + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p}{p}u'.v^{(p)} + \binom{p}{p}u.v^{(p+1)}$$

Usando las igualdades

$$\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$$
$$\binom{p}{0} = \binom{p+1}{0} = \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} = 1$$

Tenemos

$$y^{(p+1)} = \binom{p+1}{0}u^{(p+1)}.v + \binom{p+1}{1}u^{(p)}.v' + \binom{p+2}{2}u^{(p-1)}.v'' + \cdots$$
$$+\binom{p+1}{p+1}u.v^{(p+1)} = (u'.v + u.v')^{(p+1)}$$

Por lo tanto, la fórmula de Leibniz es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 33. Si $f(x) = \sqrt{x^2+5}\,,\ g(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$ y $h(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 4}{\sqrt{2x+9}}$,

halle: a) $f''(x)$ b) $g''(x)$ c) $h'''(x)$

Solución

a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, entonces $f''(x) = \dfrac{5}{(x^2+5)^{3/2}}$.

b) $g'(x) = \dfrac{x}{|x|}\left[\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]$, $\forall\, x \neq 0$ (en $x = 0$ no es derivable).

En vista de que $\dfrac{x}{|x|}$ es 1 ó -1, según sea $x > 0$ ó $x < 0$, al derivar $\dfrac{x}{|x|}$ lo consideraremos como constante. Luego,

$$g''(x) = \frac{x}{|x|}\left[\frac{(1+x^2)^2(-2x) - (1-x^2)4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\right] = \frac{2x}{|x|}\left[\frac{x^3 - 3x}{(1+x^2)^3}\right]$$

c) $h(x) = uv$, donde $u = x^4 + x^3 + 4$ y $v = (2x+9)^{-1/2}$. Luego, por la fórmula de Leibniz, se tiene

$$h'''(x) = (u'v + uv')^{(3)} = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Por tanto,

$$h'''(x) = \frac{24x+6}{\sqrt{2x+9}} - \frac{3(12x^2+6x)}{(2x+9)^{3/2}} + \frac{9(4x^3+3x^2)}{(2x+9)^{5/2}} - \frac{15(x^4+x^3+4)}{(2x+9)^{7/2}}$$

Ejemplo 34. Sean $f(x) = |x|^3$ y $g(x) = \begin{cases} x^4, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^4, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ y determine si existe $f'''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Halle $g'(x)$ y $g''(x)$ y determine si existe $g'''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

www.FreeLibros.com

Solución

a) Al ser $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, se tiene $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x > 0 \\ -3x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{si } x > 0 \\ -6x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f'''(x) = \begin{cases} 6, & \text{si } x > 0 \\ -6, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando derivadas laterales, se obtiene que $f'(0) = f''(0) = 0$. $f'''(0)$ no existe, pues $f'''(0^-) = -6 \neq 6 = f'''(0^+)$. Por tanto, $f'''(x)$ no existe para todo $x \in \mathbb{R}$ (solo existe para todo $x \neq 0$).

b) Con el mismo razonamiento, se tiene

$$g'(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{si } x > 0 \\ -4x^3, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad g''(x) = \begin{cases} 12x^2, & \text{si } x > 0 \\ -12x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

$$g'''(x) = \begin{cases} 24x, & \text{si } x > 0 \\ -24x, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Se tiene que $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$. Luego, $g'''(x)$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 35. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, calcule su derivada de orden n.

Solución

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$, entonces

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

$$P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 2a_2$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x) = n!\, a_n.$$

Además, tenemos que $P^{(k)}(x) = 0$, $\forall\, k \geq n+1$.

Ejemplo 36. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq -1$, calcule la n-ésima derivada de f.

Solución

Como $f(x) = (1+x)^{-1}$, derivando sucesivamente, se obtiene

$$f'(x) = -1(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = (1)(2)(1+x)^{-3} = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Ejemplo 37. Halle la n-ésima derivada de $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Solución.

Teniendo en cuenta que $f(x) = (1+x)^{1/2}$, para $x > -1$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} = -\frac{1}{2^2\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2^3}(1+x)^{-5/2} = \frac{3}{2^3\sqrt{(1+x)^5}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{(3)5}{2^4}(1+x)^{-7/2} = -\frac{(5)(3)}{2^4\sqrt{(1+x)^7}}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)((2n-5)\ldots(5)(3)}{2^n\sqrt{(1+x)^{2n-1}}}, \ \forall\, n \geq 2$$

Ejemplo 38. Si $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$, halle $f^{(n)}(x)$.

Solución

Se tiene $f'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} = (2x+1)^{-2}$, $f''(x) = -2.2(2x+1)^{-3}$,

$$f'''(x) = 2^2 \cdot 2 \cdot 3(2x+1)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}n!}{(2x+1)^{n+1}}$$

Ejemplo 39. Sea $f(x) = \dfrac{6x+5}{x^2+x-6}$, halle $f^{(n)}(x)$.

Solución

Usando fracciones parciales, tenemos

$$f(x) = \frac{17}{5}(x-2)^{-1} + \frac{13}{5}(x+3)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{17}{5}[-(x-2)^{-2}] + \frac{13}{5}[-(x+3)^{-2}]$$

$$f''(x) = \frac{17}{5}[2(x-2)^{-3}] + \frac{13}{5}[2(x+3)^{-3}]$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{5}\left[\frac{17}{(x-2)^{n+1}} + \frac{13}{(x+3)^{n+1}}\right]$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 40. Sea $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x^2-2x-3}$, halle $f^{(n)}(x)$.

Solución

Como $f(x)$ es una fracción racional impropia, primero dividimos y luego aplicamos fracciones parciales a la fracción propia resultante, esto es,

$$f(x) = 1 + \frac{4x+8}{(x-3)(x+1)} = 1 + 5(x-3)^{-1} - (x+1)^{-1}$$

Derivando sucesivamente, se obtiene

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{5}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

Ejemplo 41. Sea $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x^2-4x+4}$, halle $f^{(n)}(x)$.

Solución

Aplicando el método descrito en el ejemplo anterior, se obtiene

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{3}(x-1)^{-1} + \frac{17}{4}(x-2)^{-1} + \frac{17}{12}(x+2)^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}[-(x-1)^{-2}] + \frac{17}{4}[-(x-2)^{-2}] + \frac{17}{12}[-(x+2)^{-2}]$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}[2(x-1)^{-3}] + \frac{17}{4}[2(x-2)^{-3}] + \frac{17}{12}[2(x+2)^{-3}]$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{3}[-2.3(x-1)^{-4}] + \frac{17}{4}[-2.3(x-2)^{-4}] + \frac{17}{12}[-2.3(x+2)^{-4}]$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{-2}{3(x-1)^{n+1}} + \frac{17}{4(x-2)^{n+1}} + \frac{17}{12(x+2)^{n+1}}\right], \ \forall n \geq 2$$

Ejemplo 42. Si $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^2-16}$, halle $f^{(n)}(x)$.

Solución

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, se tiene

$$f(x) = x^3 + 16x + \frac{1025}{8}(x-4)^{-1} + \frac{1023}{8}(x+4)^{-1}$$

Derivando sucesivamente y factorizando, se tiene

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{8}\left[\frac{1025}{(x-4)^{n+1}} + \frac{1023}{(x+4)^{n+1}}\right], \ \forall n \geq 4$$

5.9 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Sea $E(x,y) = 0$ una ecuación de variables x e y. Si al reemplazar y por $f(x)$, la ecuación se transforma en una identidad, entonces la función definida por $y = f(x)$ es llamada **función implícita** determinada por la ecuación $E(x,y) = 0$.

Por ejemplo, la ecuación $y^2 - x + 1 = 0$ determina implícitamente a las funciones

$$y = f(x) = \sqrt{x-1} \ \text{ ó } \ y = g(x) = -\sqrt{x-1}$$

Estas funciones (explícitas) se obtuvieron despejando y de la ecuación. Es fácil comprobar que estas expresiones satisfacen la ecuación $y^2 - x + 1 = 0$.

Es necesario recalcar que no toda función dada implícitamente puede ser expresada en forma explícita. Por ejemplo, no es posible despejar y de la ecuación $y^7 + \cos y - x^2 + \operatorname{sen} x + 4 = 0$.

Finalmente, diremos que no toda ecuación define una función en forma implícita. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 4 = 0$ no define ninguna función.

La obtención de la derivada de una función definida en forma implícita por una ecuación se denomina **derivación implícita**.

Supongamos que la ecuación $y^2 - x + 1 = 0$ define implícitamente a la función $y = f(x)$, entonces

$$[f(x)]^2 = x - 1$$

Derivando respecto de x a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = \frac{d}{dx}(x-1) \Rightarrow 2f(x).f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2y}$$

Este resultado se puede obtener sin necesidad de reemplazar y por $f(x)$, ya que

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x-1) \Rightarrow 2y \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

Si derivamos la función explícita $y = \sqrt{x-1}$, obtenemos

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2y}$$

Si hubiéramos considerado la función $y = -\sqrt{x-1}$, el resultado es el mismo.

En general, si la ecuación $E(x,y) = 0$ define implícitamente a la función $y = f(x)$, para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ o y' es suficiente derivar la ecuación término a término, considerando a la variable y como una función de x, y de la ecuación resultante despejar y'.

www.FreeLibros.com

Un método práctico para obtener $\frac{dy}{dx}$ es aplicar la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{E'_x}{E'_y} \quad \text{(I)}$$

donde E'_x es la derivada de $E(x,y)$ respecto a x, considerando a y constante, y E'_y es la derivada de $E(x,y)$ respecto a y, considerando a x constante.

En el ejemplo anterior, $E'_x = -1 \wedge E'_y = 2y$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

La fórmula (I) se demuestra usando "derivadas parciales".

Ejemplo 43. Las siguientes ecuaciones definen implícitamente una función $y = f(x)$. Halle $y' = \frac{dy}{dx}$.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $4x^2 - 9y^2 = 36$ c) $\frac{6x + 8x^2y - y^3 + y^5}{x^2} = 4$

Solución

a) Derivando implícitamente respecto a x, se obtiene

$$2x + 2yy' = 0, \text{ de donde } y' = -\frac{x}{y}$$

b) Análogamente, $\frac{d}{dx}[4x^2 - 9y^2] = \frac{d}{dx}(36) \Leftrightarrow 8x - 18yy' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{4x}{9y}$

c) En este caso, transformando la ecuación dada, se tiene

$$6x + 8x^2y - y^3 + y^5 - 4x^2 = 0$$

Aplicando la fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{E'_x}{E'_y}$, se obtiene $\frac{dy}{dx} = -\frac{6 + 16xy - 8x}{8x^2 - 3y^2 + 5y^4}$

Observación 6. *De los resultados obtenidos en el ejemplo 43, se deduce que si se trata de hallar la derivada de una función implícita para un determinado valor de x, es necesario conocer el correspondiente valor para y.*

Ejemplo 44. Halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $(1;1)$.

Solución

El punto $(1;1)$ pertenece a la curva, pues satisface su ecuación.

Para hallar la pendiente de la recta tangente, derivamos implícitamente. Así, se tiene

$$y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x} = m_T$$

Evaluando esta derivada y' en el punto $(1;1)$ se obtiene $m_T = -1$. Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas tangente y normal son, respectivamente:

$$L_T: y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow L_T: x + y - 2 = 0$$
$$L_N: y - 1 = (x - 1) \Leftrightarrow L_N: x - y = 0$$

Ejemplo 45 Halle la ecuación de la recta normal a la gráfica de

$$27\frac{(y^2 - x^2)^{3/2}}{x^3} + 34\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)^{-1} = 79$$

en el punto $(3;5)$.

Solución

Multiplicando la ecuación por x^3, se obtiene

$$27(y^2 - x^2)^{3/2} + \frac{34x^4y}{y^2 + x^2} = 79x^3$$

Derivando implícitamente, se tiene

$$\frac{81}{2}(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(2yy' - 2x) + 34\left[\frac{(4x^3y + x^4y')(x^2 + y^2) - x^4y(2x + 2yy')}{(x^2 + y^2)^2}\right] = 237x^2$$

Evaluando en el punto $(3;5)$, se obtiene $y' = \frac{415}{249}$.

La ecuación de la recta normal es L_N: $249x + 415y - 2822 = 0$

Ejemplo 46. Halle el área del triángulo que forman las rectas tangente y normal a la curva $\sqrt{xy} - 2x + 3y - 6 = 0$ en el punto $(3;3)$ y el eje y.

Solución

Derivando implícitamente, se obtiene

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') - 2 + 3y' = 0$$

Evaluando en el punto $(3;3)$, tenemos

$$y' = \frac{3}{7} = m_T$$

La ecuación de la tangente es L_T: $3x - 7y + 12 = 0$

La ecuación de la normal es L_N: $7x + 3y - 30 = 0$

Las intersecciones de de estas rectas con el eje y son $(0;12/7)$ y $(0;10)$. Luego, el área del triángulo (Fig. 5.6) es

$$A = \frac{3\left(10 - \frac{12}{7}\right)}{2} = \frac{87}{7}u^2$$

www.FreeLibros.com

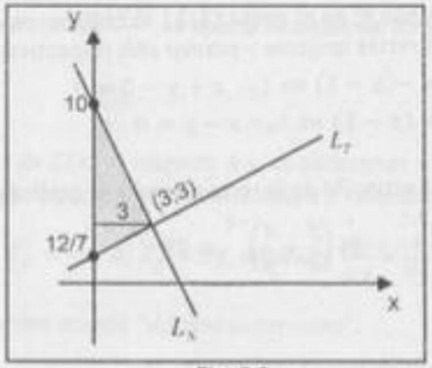


Fig. 5.6

Ejemplo 47. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ de cada una de las funciones dadas.

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$ b) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 4$, si $x \neq y$

Solución

a) Si $2x^2 - 3y^2 = 6 \Rightarrow y' = \frac{2x}{3y}$ ... (α)

Derivando nuevamente respecto a x, se tiene

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} \quad \ldots \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) y simplificando, se obtiene $y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{3y^2 - 2x^2}{3y^3}\right)$.

Finalmente, como $3y^2 - 2x^2 = -6$, obtenemos

$$y'' = -\frac{4}{3y^3}$$

b) Para facilitar la derivación, elevamos al cuadrado ambos términos. De este modo, obtenemos

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 14 \Rightarrow \frac{y - xy'}{y^2} + \frac{xy' - y}{x^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{x}, \ \text{si } x \neq y$$

Nuevamente, derivando implícitamente, se tiene

$$y'' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x\left(\frac{y}{x}\right) - y}{x^2} = 0$$

Luego, $y'' = 0$.

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

I) En los ejercicios del 1 al 8, calcule $f^{(n)}(x)$ para el valor de n que se indica.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $n = 2$ R. $\frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

2) $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$, $n = 2$ R. $\frac{2 + 3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^3}$

3) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{1 - x}$, $n = 4$ R. $\frac{24}{(x - 1)^5}$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x}$, $n = 3$ R. $\frac{6}{(1 - x)^4}$

5) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$, $n = 4$ R. $\frac{2^4 \cdot 4!}{(2x + 3)^5}$

6) $f(x) = \sqrt{4x + 1}$, $n = 3$ R. $\frac{24}{(4x + 1)^{5/2}}$

7) $f(x) = |9 - x^2|$, $n = 2$ R. $\frac{2(9 - x^2)}{|9 - x^2|}$

8) $f(x) = |4 - x^3 - x^5|$, $n = 3$ R. $\frac{(4 + x^3 - x^5)(6x - 20x^3)}{|4 + x^3 - x^5|}$

9) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable hasta el orden 2 tal que $f(3) = 2$ y $f'(3) = f''(3) = 5$. Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que está definida por $g(x) = x^2 f(2x^2 - 4x - 3)$, calcule:

a) $g''(x)$ en función de f, f' y f'' b) $g''(3)$

R. a) $2f(u) + (20x^2 - 16x)f'(u) + (4x^2 - 4x)^2 f''(u)$, donde $u = 2x^2 - 4x - 3$ b) $g''(3) = 3412$

II) En los ejercicios siguientes, halle $f^{(k)}(x)$.

1) $f(x) = \frac{1}{(x - a)^n}$ R. $(-1)^k \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)!}(x - a)^{-n-k}$, $x \neq a$

2) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ R. $\frac{2(-1)^k k!}{(1 + x)^{k+1}}$

3) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 - 4}$ R. $(-1)^k k!\left[\frac{3}{(x + 2)^{k+1}} + \frac{2}{(x - 2)^{k+1}}\right]$

4) $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$ R. $\frac{(k + 1)!}{(1 - x)^{k+2}}$

5) $f(x)=\dfrac{x^5}{x^2-1}$ 6) $f(x)=\dfrac{x^6+x^2-1}{x^2+x-2}$

7) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$ 8) $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2+x-12}$

9) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-1}{x^3-x^2-4x+4}$ 10) $f(x)=\dfrac{2x+1}{6x^2-x-1}$

III) En los siguientes ejercicios, halle $\dfrac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita.

1) $x^3+2x^2y-xy^2+2y^3=4$ R. $\dfrac{3x^2+4xy-y^2}{2xy-2x^2-6y^2}$

2) $x^3-3axy+y^3=a^3$ R. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

3) $x^2-a\sqrt{xy}+y^2=a^2$ R. $\dfrac{4x\sqrt{xy}+y}{4y\sqrt{xy}+ax}$

4) $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^3}=\dfrac{5}{2}$ R. $\dfrac{3y}{2x}$

5) $\sqrt{\dfrac{y-\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}}+\sqrt{\dfrac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}}=\dfrac{5}{2}$ R. $\dfrac{y}{2x}$ ó $\dfrac{25}{18y}$

6) $x^3+xy^2=x^2y$ R. $\dfrac{2xy-3x^2-y^2}{2xy-x^2}$

IV) En cada uno de los ejercicios del grupo III, determine $\dfrac{dx}{dy}$, donde $x=g(y)$ es la función definida implícitamente por la ecuación dada.

V) En los siguientes ejercicios, halle el valor de y'' en el punto indicado.

1) $x^3+xy^2+y^3=8$, $P(2;2)$ R. -15

2) $x^2+5xy+y^2-2x+y=6$, $P(1;1)$ R. $111/256$

3) $x^4-xy+y^4=1$, $P(0;1)$ R. $-1/16$

4) $x^2+4xy+y^2+3=0$, $P(2;-1)$ R. $-1/3$

VI) Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, expresando su respuesta en la forma más simple.

1) $x^{1/2}+y^{1/2}=2$ R. $x^{-3/2}$

2) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ R. $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$

3) $x^3-3axy+y^3=b^3$ R. $\dfrac{2b^3xy}{(ax-y^2)^3}$

4) $3x^2-2xy+y^2=a^2$ R. $\dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$

5) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ R. $\dfrac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$

VII) Halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto indicado.

1) $x^3+3xy^2+y^3=1$, $P(2;-1)$

2) $\sqrt{4x}-\sqrt{9y}+5=0$, $P(4;9)$

3) $x\sqrt{xy}+2y^2-3=0$, $P(1;1)$

4) $\sqrt{3+x^2y^2}-\dfrac{2x^2}{y^2}=0$, $P(1;1)$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{1+xy^2}}{\sqrt[4]{1+x^2y}}=(2)^{1/12}$, $P(1;1)$

6) $x^3-axy+3ay^2=3a^3$, $P(a;a)$

R. $L_T: 2x+5y-7a=0$, $L_N: 5x-2y-3a=0$

VIII) En el siguiente grupo de ejercicios, halle $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$, expresando su respuesta en su forma más simple.

1) $\dfrac{x+3y^2}{x}-\dfrac{x}{x+3y^2}=7$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[m]{\dfrac{y}{x}}=10$, para todo n y m entero

www.FreeLibros.com

3) $\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}} - \sqrt{\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}} = e^{\sqrt{7}}$

PROBLEMAS

1) Demuestre que la tangente a la curva $xy = 1$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área constante, es decir, que el área no depende del punto de tangencia.

2) Demuestre que el segmento de tangente a la hipérbola $xy = a^2$ comprendido entre los ejes coordenados queda dividido en 2 partes iguales por el punto de tangencia.

3) Pruebe que la suma de las intersecciones con los ejes coordenados de cualquier recta tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$ es constante e igual a b $(b > 0)$.

4) Halle las ecuaciones de las normales a la parábola $4y - 8x^2 + 9 = 0$ que pasan por el origen.

5) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P(-1;2)$ y es tangente a la curva $yx + 3y = x - 1$

6) Si las tangentes a las curvas $2x^2 - 8x - y + 1 = 0$, $x^2 + 8x - 2y - 5 = 0$ son paralelas y los puntos de tangencia están sobre una vertical, halle las coordenadas de dichos puntos. R. $(4;1)$, $(4, 43/2)$

7) Halle la ecuación de la tangente a la curva $x^2y = x + 1$ cuya inclinación es 45°. R. $x - y + 1 = 0$

8) Si una recta tangente a la curva $x^4 - 2x^2 - x + y = 0$ en el punto $(-1;0)$ es también tangente a la misma curva en el punto $P(a;b)$, halle las coordenadas de P.

9) Si la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2y + a^2y = x^2 - a^2$ en el punto de abscisa $x = 1$ es 1, halle el valor de a.

10) Demuestre que en la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$, el segmento de la tangente comprendida entre los ejes coordenados tiene una longitud constante e igual a b.

www.FreeLibros.com

5.10 DIFERENCIALES

Definición 7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $y = f(x)$.

i) Si $a \in D_f$ y $\Delta x \neq 0$ es un número tal que $a + \Delta x \in D_f$, Δx es llamado **incremento** de x. Se define Δx como el cambio que experimenta la variable independiente x al pasar de a hasta $a + \Delta x$.

ii) El cambio correspondiente en y (cuando x pasa de a hasta $a + \Delta x$) es el incremento de y, que se denota por Δy, y está dado por

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

iii) La diferencial de la variable independiente x (denotada por dx) se define como

$$dx = \Delta x$$

iv) La diferencial de la función f en el punto a, correspondiente al incremento Δx, (denotada por dy) se define como

$$dy = f'(a) \cdot \Delta x = f'(a).dx$$

En general, la diferencial de la función f en cualquier punto $x \in D_f$, está definida como

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

5.10.1 INTERPRECIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $a \in D_f$, y sean $P(a; f(a))$ y $Q(a + \Delta x; f(a + \Delta x))$ dos puntos sobre la gráfica de f (Fig. 5.7), entonces:

a) $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ es la distancia dirigida de R a Q.

b) La pendiente de la recta tangente T es $m_T = f'(a)$. De esta manera, la distancia dirigida de R a S es

$$\overline{RS} = \tan\alpha \cdot \Delta x = f'(a) \cdot \Delta x = f'(a) \cdot dx = dy$$

c) Cuando Δx es pequeño $(\Delta x \to 0)$, la diferencia entre Δy y dy también es pequeña. Luego, dy es una aproximación para Δy, es decir,

$$\Delta y \cong dy \quad o \quad f(a + \Delta x) - f(a) \cong f'(a) \cdot dx$$

d) De esta última aproximación, se deduce

$$f(a + \Delta x) \cong f(a) + f'(a) \cdot dx$$

Por lo tanto, Δy representa el aumento o disminución de la variable dependiente y cuando x cambia en una cantidad dx, mientras que dy es una aproximación a ese aumento o disminución (Δy).

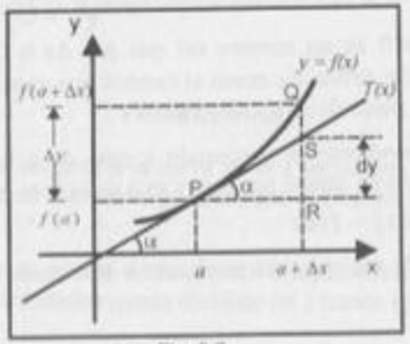


Fig. 5.7

Ejemplo 48. Si $f(x) = x^2$, calcule $\Delta y \wedge dy$ para $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}3$.

Solución

a) $\Delta y = f(3 + 0{,}3) - f(3) = f(3{,}3) - f(3) = 10{,}89 - 9 = 1{,}89$

Este resultado nos indica que si $y = x^2$, el valor y aumenta en 1,89 cuando x cambia de 3 a 3,3.

b) $dy = f'(x).dx = f'(3).dx = (6).(0{,}3) = 1{,}8$

Este resultado nos indica que si $y = x^2$, el valor y aumenta aproximadamente en 1,8 cuando x cambia de 3 a 3,3.

En este ejemplo, se observa que la diferencia entre Δy y dy es de 0,09.

Ejemplo 49. Si la longitud del radio de un círculo es 8,25 cm y el error máximo posible al medirlo es de $\pm 0{,}05$, ¿cuál es el error cometido al calcular el área?

Solución

Área del círculo: $A(r) = \pi r^2$

Como $r_1 = 8{,}25$ y $\Delta r = \pm 0{,}05$, entonces el incremento de A es

$$\Delta A = \pi(r_1 + \Delta r)^2 - \pi r_1^2 = \pi \Delta r(2r_1 + \Delta r) = \pi(\pm 0{,}05)(16{,}5 \pm 0{,}05)$$

Luego, $\Delta A = 0{,}8275\pi \text{ cm}^2$ (incremento por exceso) ó

$\Delta A = -0{,}8275\pi \text{ cm}^2$ (incremento por defecto)

Ejemplo 50. Si $y = 6\sqrt[3]{x^4}$, calcule dy en cualquier punto x.

Solución

Se tiene:

$$dy = f'(x) \cdot dx = (8\sqrt[3]{x}) \cdot dx$$

www.FreeLibros.com

5.10.2 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Proposición 7. Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$ funciones derivables y c una constante, entonces

1) $d(c) = 0$

2) $d(c \cdot u) = c \cdot du$

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$

4) $d(u \cdot v) = udv + vdu$

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, siempre que $v \neq 0$

Demostración. Ejercicio para el lector.

Ejemplo 51. Si $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2 + x^2}}$, halle $df(x)$.

Solución

Teniendo en cuenta que $df(x) = f'(x)dx$, basta hallar la derivada $f'(x)$ y multiplicarlo por la diferencial de la variable independiente dx.

$$df(x) = \left(\frac{4x}{\sqrt{2 + x^2}}\right)' dx = \frac{8dx}{(2 + x^2)^{3/2}}$$

Observación 7. (Estimación del error)

Sea x el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ su valor exacto. Entonces, el error de medición en la medida de la variable x es

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = dx$$

Ahora, si el valor medido x se utiliza para calcular el valor de $y = f(x)$, entonces el error transmitido en la medida de la variable y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Este error trasmitido se aproxima (o se estima) mediante la diferencial de $y = f(x)$, esto es,

$$\Delta y \cong dy = f'(x)\, dx$$

Para determinar si el error transmitido es grande o pequeño, se usa el error relativo y el error porcentual de $y = f(x)$. Estos errores son dados por

a) $E.R(f(x)) = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \cong \frac{df(x)}{f(x)}$ **(error relativo)**

b) $E.P(f(x)) = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \times 100\% \cong \frac{df(x)}{f(x)} \times 100\%$ **(error porcentual)**

Ejemplo 52. La altura de un paralelepípedo de base cuadrada es 15 cm. Si el lado de la base cambia de 10 a 10,02 cm, calcule el cambio aproximado de su volumen usando diferenciales. Además, halle el error relativo y el error porcentual.

Solución

El volumen del paralelepípedo es $V = x^2h$. Como h es constante y x variable, tenemos

$$V = 15x^2 \quad y \quad dV = 30xdx$$

En nuestro caso, $x = 10$ y $dx = 0{,}02$. Luego, $dV = 6\ cm^3$.

Por tanto, el volumen sufre aproximadamente un aumento de $6\ cm^3$.

Los errores relativo y porcentual son, respectivamente:

$$E.R(V) \cong \frac{dV}{V} = \frac{30x\,dx}{15x^2} = \frac{30(10)(0{,}02)}{15(10)^2} = 0{,}004$$

$$E.P(V) \cong \frac{dV}{V} \times 100 = 0{,}4\%$$

Ejemplo 53. Es necesario construir una caja cúbica que tenga la capacidad de $8000\ dm^3$. Use diferenciales para estimar el error en la medida de la arista interior, a fin de que el volumen sea correcto dentro de una aproximación de $12\ dm^3$.

Solución

El volumen de un cubo es $V = a^3$. Como el volumen de la caja es de $8000\ dm^3$, se obtiene $a = 20$.

Por otro lado, $dV = 3a^2da \Rightarrow da = \dfrac{dV}{3a^2}$

Como $dV = 12$ y $a = 20$, entonces $da = 0{,}01$.

Esto significa que la arista debe ser medida con una aproximación $\leq 0{,}01dm$.

Ejemplo 54. Mediante diferenciales, aproxime la raíz quinta de 3127.

Solución

Sea $f(x) = \sqrt[5]{x}$, entonces en $a = 3125$ se tiene que $f(a) = \sqrt[5]{3125} = 5$.

Si $a + \Delta x = 3127 \Rightarrow \Delta x = 2 = dx$. Como $f(a + \Delta x) \cong f(a) + f'(a)dx$, se tiene

$$f(3127) \cong f(3125) + f'(3125)(2) \Leftrightarrow \sqrt[5]{3127} \cong 5 + \frac{1}{3125}(2) = 5{,}00064$$

El valor de $\sqrt[5]{3127}$ que se obtiene por medio de una calculadora es 5,00063983.

Ejemplo 55 Halle aproximadamente $\sqrt[7]{\dfrac{201}{202}}$.

Solución

Sea $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Como $\dfrac{201}{202} = 1 - \dfrac{1}{202}$, consideramos

$$a = 1 \text{ y } \Delta x = -\frac{1}{202} = dx$$

Teniendo en cuenta que $f'(x) = \dfrac{1}{7}x^{-6/7}$, se tiene $f'(1) = \dfrac{1}{7}$.

Como $f(1 + \Delta x) = f\left(\dfrac{201}{202}\right) \cong f(1) + f'(1)dx$, entonces tenemos

$$f\left(\frac{201}{202}\right) \cong 1 + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{202}\right) = \frac{1413}{1414} = 0{,}999292786.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 5, halle Δy, dy y $E = \Delta y - dy$ para los valores de a y Δx indicados.

1) $f(x) = x^2 + 5x$, $a = -1$ y $\Delta x = 0{,}02$
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 3$, $a = 2$ y $\Delta x = 0{,}01$
3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $a = 0$ y $\Delta x = 0{,}1$
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 4$ y $dx = 0{,}01$
5) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, $a = 1$ y $dx = 0{,}3$

En los ejercicios del 6 al 12, halle la diferencial de la función.

6) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 1$
7) $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt{x}$
8) $f(x) = \dfrac{3ax}{(x^2 + 1)^2}$
9) $f(t) = \sqrt{\dfrac{t^2 + 1}{t^2 - 1}}$
10) $f(s) = \dfrac{2ks}{\sqrt{s + 1}}$
11) $f(x) = \dfrac{4x\text{Sgn}(x^2 - 1)}{\sqrt{[\![x/2]\!] + x^2}}$, $x \in \langle 4; 6\rangle$ R. $\dfrac{8dx}{(2 + x^2)^{3/2}}$
12) $f(x) = \left[\!\left[\dfrac{x}{7}\right]\!\right] + \dfrac{1}{10}x - \left[\!\left[\dfrac{x}{10}\right]\!\right]$, $x \in \langle 0; 7\rangle$ R. $\dfrac{dx}{10}$

www.FreeLibros.com

En los ejercicios del 13 al 17, estime el valor que se indica aplicando diferenciales.

13) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, $f(3{,}002)$

14) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 4$, $f(-2{,}97)$

15) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+2x}}{x}$, $f(2{,}024)$

16) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f(0{,}1)$

17) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$, $f(1{,}91)$

En los ejercicios del 18 al 23, estime el valor aproximado de:

18) $\sqrt{35{,}5}$ 19) $\sqrt[3]{7{,}45}$

20) $(8{,}01)^{4/3} + (8{,}01)^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{8{,}01}}$ 21) $\sqrt{82} + \sqrt[4]{82}$

22) $3\sqrt{63} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{63}}$ 23) $\sqrt[3]{1020}$

24) Use diferenciales para estimar los valores de x para los cuales

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0{,}01$ R. $x > 2500$

b) $\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} < 0{,}002$ R. $x > 625$

Solución (a)

(a) Si $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x+1) - f(x)$

Luego, $\Delta x = 1 = dx$.

Como $\Delta f < 0{,}001$ y $\Delta f(x) \cong f'(x)dx$, entonces

$$f'(x)dx < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0{,}01 \Rightarrow x > 2500.$$

25) El diámetro de una esfera es 9 cm. Al medirlo, se introduce un posible error de $\pm 0{,}05$ cm ¿Cuál es el error porcentual posible en el cálculo del volumen?

26) La altura de un cono recto circular es el doble del radio de la base. Al efectuar una medición, se halló que la altura es de 12 pulgadas con un error posible de 0,005 pulgadas. Halle el error aproximado en el cálculo del volumen del cono.

R. $9\pi/40\ pulg^3$

www.FreeLibros.com

27) Una caja metálica de forma cúbica de 64 pulg^3 de volumen interior tiene por caras planchas de 1/4 pulgada de espesor. Si el costo del metal a emplearse es de $8 por pulg^3, halle el costo aproximado del metal que se empleará en la construcción de la caja aplicando diferenciales.

R. $ 96

28) Un tanque cilíndrico abierto tiene una capa exterior de 1/32 pulg de espesor. Si el radio interior es de 6 pulg y la altura 10 pulg, aplicando diferenciales, determine aproximadamente la cantidad de pintura que se requiere para recubrir el tanque.

R. $15\pi/4$ pulg^3

29) Se quiere construir un recipiente de forma cúbica de 1000 $pulg^3$ de volumen, cuyas caras son de un material que cuesta $ 2/pulg^2 ¿Con qué exactitud se debe construir la arista de cada cara para que el costo total del material sea el correcto, con una tolerancia de $ 50?

R. error de 5/24 pulg

30) Se mide el diámetro de una esfera y con el resultado se calcula el valor de su volumen. Si el máximo error posible al medir el diámetro es 0,02 cm y el error máximo aceptable al calcular el volumen es de 3 cm^3, ¿cuál es el diámetro aproximado de la esfera más grande a la que puede aplicarse estas condiciones?

R. $10\sqrt{3/\pi}$ cm

31) Un cilindro circular recto tiene 10 cm de altura. Si el radio cambia de 2 a 2,06 cm, calcule el cambio aproximado correspondiente al volumen del cilindro y halle el error porcentual del cambio en el volumen.

32) En determinada fábrica, la producción es $Q(K) = 400K^{1/2}$ unidades, donde K representa la inversión de capital de la empresa. Estime qué incremento porcentual se generará en la producción a partir de un aumento del 1% en la inversión del capital.

R. 0,5 %

33) En una refinería de petróleo, los tanques para almacenar el combustible tienen la forma de un cilindro circular cuya altura es el triple del radio de la base. Al medir la altura de uno de los tanques, se obtiene 15 m con un error posible de 0,06 m. Aplicando diferenciales, determine el error al calcular el volumen. Además, indique el error porcentual en el cálculo del volumen.

R. $9\pi/2\ \text{m}^3$ y 1,2 %

34) En una planta industrial, se utilizan 10 recipientes esféricos de hierro de radio externo de 6 pies y de grosor 1/4 de pulgada. Usando diferenciales,

a) Determine el peso del hierro utilizado en la construcción de recipientes si el peso del hierro es de 450 libras por pie cúbico.

b) Calcule el costo del hierro utilizado si una libra de hierro cuesta S/. 100.

c) Obtenga el error relativo y porcentual de la cantidad de hierro utilizado en la construcción de un recipiente.

R. a) $13500\,\pi$ libras b) S/. $1350000\,\pi$ c) 1/96 y 1,04%

35) Sea $f(x) = x^{\ln\left(\frac{p}{q}\right)}$, $p, q > 0$. Suponga que el error porcentual en el cálculo de $f(x)$ es aproximadamente 0,8 % cuando el error porcentual de x es 0,2%. Mediante diferenciales, halle p y q, sabiendo que $p + 4e^4 q = 20e^4$.

R. $p = 4e^4$ y $q = 4$

36) Un gerente de ventas estima que su equipo venderá 10000 unidades durante el próximo mes. Él cree que su estimación es precisa dentro de un error porcentual del 3%. Si la función utilidad es $u(x) = x - (4 \times 10^{-5})x^2$ dólares, donde x es el número de unidades vendidas por mes, calcule el error porcentual en la utilidad estimada.

R. 1 %

37) Calcule el volumen de una esfera de radio igual al de la base de un cono circular recto, sabiendo que se usa el mismo instrumento de medida y que al calcular el perímetro del cono se comete un error de $0{,}3\,\pi$ cm y un error de 15 % cuando se mide su volumen. Considere la altura y el radio de la base del cono de igual longitud. R. $36\,\pi$ cm³

38) Pruebe que el error relativo de un número elevado a la n-ésima potencia es n veces el error relativo del mismo número.

39) La ecuación de demanda de un producto de un monopolista es $p = \frac{10}{\sqrt{x}}$, donde p es el precio de cada unidad cuando se demandan x unidades. Si en la actualidad se demandan 25 unidades, aplicando diferenciales, estime el precio del producto cuando se tiene una demanda de 27 unidades.

40) En cierta fábrica, la producción diaria es $q(L) = 300L^{2/3}$ unidades, donde L es la fuerza laboral medida en horas de trabajo por día. Se sabe que en la actualidad se utilizan 512 horas de trabajo cada día. Aplicando diferenciales, estime la cantidad adicional de horas de trabajo necesarias para incrementar la producción diaria en 12,5 unidades.

www.FreeLibros.com

6 TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, abordaremos algunos teoremas importantes sobre funciones derivables, entre ellos, el Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio o de Lagrange y el Teorema de Cauchy. El Teorema de Rolle es importante en el Cálculo diferencial e integral y nos servirá para demostrar los Teoremas de Lagrange y de Cauchy, que también son teoremas centrales del Cálculo diferencial e integral. El Teorema de Cauchy lo demostraremos en el capítulo 9, conjuntamente con la Regla de L'Hôpital. Finalmente, estudiaremos las fórmulas de Taylor y Maclaurin para funciones derivables de orden n, con las cuales se encuentran polinomios de grado n "próximos" a cualquier función $f(x)$ que admite derivadas hasta el orden n.

6.2 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuyo dominio es $D \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in D$.

Definición 1. Se dice que f presenta valor máximo absoluto en $x = a$ si

$$f(x) \leq f(a),\ \forall x \in D.$$

$f(a)$ se denomina **valor máximo absoluto** de f.

Definición 2. Se dice que f presenta mínimo absoluto en $x = a$ si

$$f(a) \leq f(x),\ \forall x \in D.$$

$f(a)$ se denomina **valor mínimo absoluto** o **global** de f.

Definición 3. Se dice que f presenta máximo relativo o local en $x = a$, si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(a),\ \forall x \in \langle a - \delta; a + \delta \rangle.$$

A $f(a)$ se denomina **valor máximo relativo** o **local** de f (Fig. 6.1a).

Definición 4. Se dice que f presenta mínimo relativo o local en $x = a$, si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x),\ \forall x \in \langle a - \delta; a + \delta \rangle.$$

$f(a)$ se denomina **valor mínimo relativo** o **local** de f (Fig. 6.1b).

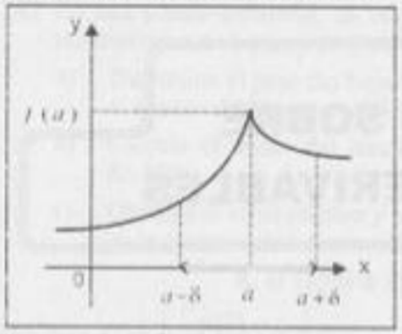


Fig. 6.1 a

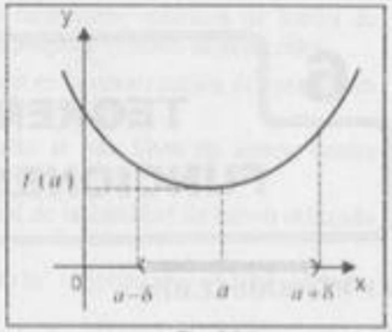


Fig. 6.1 b

Ejemplo 1. Si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, determine sus valores máximo y mínimo absolutos.

Solución

El dominio de f es $D_f = [-3;3]$ y su gráfica es una semicircunferencia (Fig. 6.2).

Existe valor máximo absoluto en $x = 0$ y $f(0) = 3$ es el valor máximo absoluto, pues $f(0) \geq f(x),\ \forall\, x \in [-3;3]$.

Existe valor mínimo absoluto en $x = -3$ y en $x = 3$, y el valor mínimo absoluto es $f(-3) = f(3) = 0$.

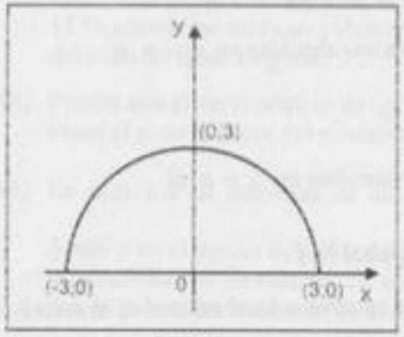


Fig. 6.2

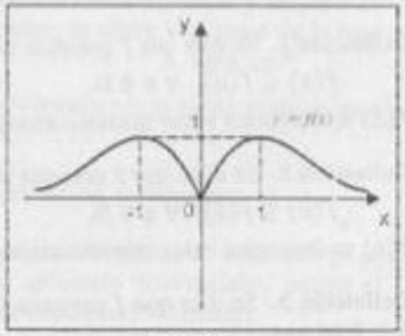


Fig. 6.3

Observación 1

1.- *Si $f(c)$ es un valor máximo ó mínimo, entonces este valor recibe el nombre de* ***valor extremo*** *de f. Así, se hablará de valores extremos relativos o extremos absolutos. El punto c es llamado punto de extremo.*

2.- *Si $f(c)$ es un valor extremo relativo, entonces c es un punto interior a D_f, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(c;\delta) \subset D_f$. Esta condición no necesariamente se verifica si $f(c)$ es un extremo absoluto, ya que un extremo absoluto puede estar en un punto que no es interior al dominio. En el ejemplo 1, el mínimo absoluto está en $x = -3$ y en $x = 3$, y estos puntos se encuentran en la frontera del dominio ($[-3;3]$).*

Ejemplo 2. Considerando la definición de extremo, si $f(x) = k$ (función constante), todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto de extremo relativo y absoluto, es decir, k es a su vez valor máximo absoluto, valor máximo relativo, valor mínimo absoluto y valor mínimo relativo.

Ejemplo 3. Sea la función $f(x) = \dfrac{|2x|}{1 + x^2}$, cuya gráfica se muestra en la Fig. 6.3.

Observando su gráfica, notamos que $f(-1) = f(1) = 1$ es valor máximo local y absoluto y $f(0) = 0$ es valor mínimo absoluto y local.

Ejemplo 4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}, & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

Analizando la gráfica de esta función (Fig. 6.4), se concluye que:

$f(-2) = -2$ es el valor mínimo absoluto.

$f(0) = 0$ y $f(1) = 2$ son valores máximos relativos.

No tiene valor máximo absoluto, tampoco tiene valores mínimos relativos.

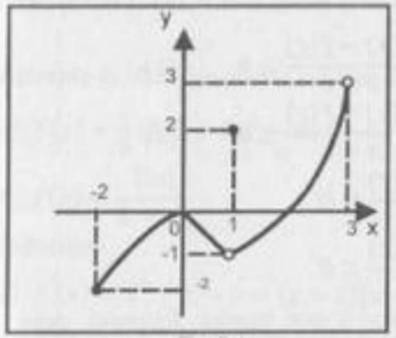


Fig. 6.4

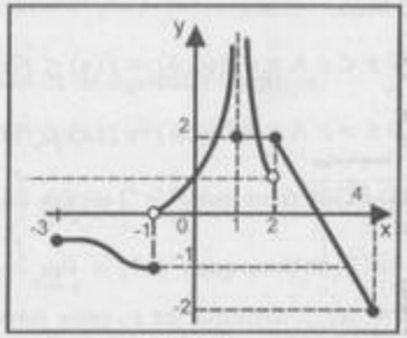


Fig. 6.5

www.FreeLibros.com

Ejemplo 5. Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2}, & -3\le x\le -1\\ x+1, & -1<x<0 \vee x=1\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}, & 0\le x<2 \wedge x\neq 1\\ 6-2x, & 2\le x\le 4\end{cases}$$

Analizando la gráfica de la función (Fig. 6.5), se concluye que:

$f(4)=-2$ es valor mínimo absoluto.

$f(-1)=0$ y $f(1)=2$ son valores mínimos relativos.

$f(2)=2$ es valor máximo relativo.

No existe valor máximo absoluto.

6.3 TEOREMA DE ROLLE

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Rolle, se demostrará la siguiente proposición:

> **Proposición 1**
> Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que
> a) $f(c)$ es un valor extremo relativo de f
> b) f derivable en c
> Entonces, $f'(c)=0$.

Demostración

Supongamos que $f(c)$ es un valor máximo local. Entonces, existe una vecindad $B(c;\delta)\subset D_f$ tal que $f(x)\le f(c)$, $\forall x\in B(c;\delta)$.

Luego,

Si $x<c \wedge x\in B(c;\delta)\Rightarrow f(x)\le f(c)$ y $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$ (1)

Si $x>c \wedge x\in B(c;\delta)\Rightarrow f(x)\le f(c)$ y $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$ (2)

De (1) se tiene que $f'(c^-)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$

De (2) se tiene que $f'(c^+)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$

Por ser f derivable en c, estos límites existen y son iguales. Entonces, debe cumplirse $f'(c^-)=0=f'(c^+)$ y, por tanto, $f'(c)=0$.

De modo similar se demuestra en el caso que $f(c)$ sea un mínimo local.

Observación 2. *La proposición 1 afirma que si c es un punto de extremo relativo de f y f es derivable en c, entonces necesariamente $f'(c)=0$. Esto significa que la tangente en $P(c;f(c))$ es horizontal. Sin embargo, la proposición no afirma que esta condición es suficiente, es decir, si $f'(c)=0$, c no necesariamente es la abscisa de un punto de extremo.*

Por ejemplo, sea $f(x)=(x-3)^3$, $x\in\mathbb{R}$.
Como $f'(x)=3(x-3)^2$, entonces $f'(3)=0$. Sin embargo, $x=3$ no es un punto de extremo relativo (Fig. 6.6).

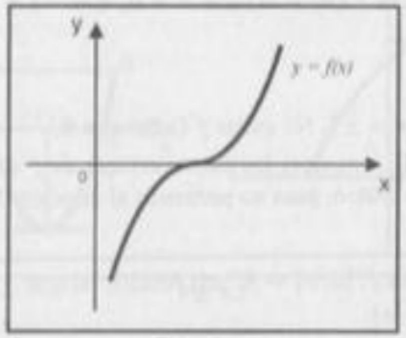


Fig. 6.6

Definición 5 (Punto crítico). Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en $c\in D_f$. El número c recibe el nombre de **punto crítico** o **punto singular** de f si $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no existe.

Observación 3. *De la observación 2, una función f puede tener extremos relativos en los puntos críticos. Para calcular estos puntos, es suficiente resolver la ecuación $f'(x)=0$ ó la que resulta de considerar que $f'(x)$ no existe.*

Ejemplo 6. Halle los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{6}(2x^3+3x^2-36x+6)$ b) $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$

c) $f(x)=\dfrac{2|x|}{1+x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{7}+\dfrac{7}{x}$

Solución

a) $f'(x)=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$f'(x)=(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x=-3$ y $x=2$ son los puntos críticos de la función f (estos dos puntos pertenecen al dominio de f).

www.FreeLibros.com

b) $f'(x) = \dfrac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x) = 0$ cuando $x = -1$. $f'(x)$ no existe si $x = 0$.

Como el dominio de f es $\mathbb{R}$, sus puntos críticos son $x = 0$ y $x = -1$.

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{|x|}\dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$. No existe $f'(x)$ si $x = 0$.

Los puntos críticos de f ($D_f = \mathbb{R}$) son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

d) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 49}{7x^2}$

$f'(x) = 0$ cuando $x = \pm 7$. No existe $f'(x)$ si $x = 0$.

Como $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, entonces los puntos críticos de f son $x = -7$ y $x = 7$ ($x = 0$ no es punto crítico, pues no pertenece al dominio de f).

Teorema de Rolle. Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una función tal que

a) f es continua en $[a;b]$

b) f es derivable en $\langle a;b \rangle$

c) $f(a) = f(b) = 0$

Entonces, existe $c \in \langle a;b \rangle$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

Como f es continua en $[a;b]$, entonces f tiene un valor mínimo y un valor máximo absoluto en $[a;b]$, esto es, existen $c_1, c_2 \in [a;b]$ tales que:

$$f(c_1) = m = mín\, f(x),\ \forall x \in [a;b] \ \text{ y } \ f(c_2) = M = máx\, f(x),\ \forall x \in [a;b]$$

Si $c_1 \in \langle a;b \rangle$, en virtud de la hipótesis (b) y de la proposición 1, se cumple que $f'(c_1) = 0$ y, por tanto, el teorema está probado con $c = c_1$. Del mismo modo se prueba para $c_2 \in \langle a;b \rangle$.

Solo falta probar para el caso en que c_1 y c_2 son los extremos del intervalo $[a;b]$, es decir, $c_1 = a$ y $c_2 = b$ ó $c_2 = a$ y $c_1 = b$.

Como $f(a) = f(b) = 0$, entonces $m = M = 0$ y $f(x) = 0$, $\forall x \in [a;b]$. Luego, $f'(x) = 0$, $\forall x \in \langle a;b \rangle$, y nuevamente el teorema es verdadero.

Observación 4 *El teorema de Rolle sigue siendo válido si la hipótesis (c) se reemplaza por $f(a) = f(b)$.*

6.3.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE ROLLE

El Teorema de Rolle tiene un significado geométrico inmediato. La hipótesis indica que si la gráfica de f es continua en el intervalo $[a;b]$ y tiene rectas tangentes en todos sus puntos con abscisas en $\langle a;b \rangle$, y si $A(a; f(a))$ y $B(b; f(b))$ son dos puntos con $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $P(c; f(c))$, con $P \neq A$ y $P \neq B$, en el cual la recta tangente es paralela al eje x (Fig. 6.7).

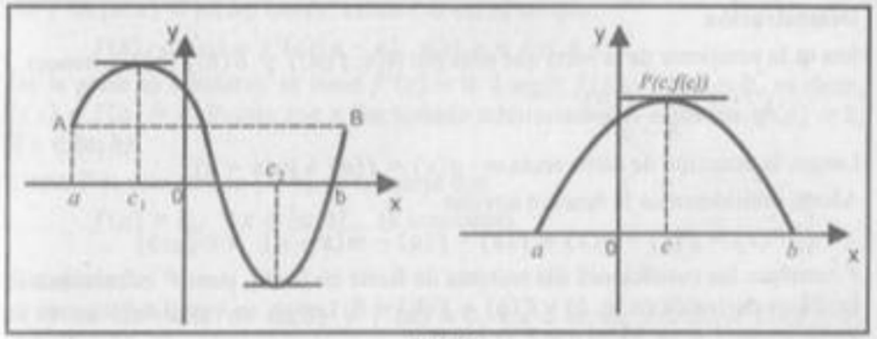


Fig. 6.7

Ejemplo 7 Dada la función $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$, verifique si satisface el Teorema de Rolle en el intervalo $[0;3]$.

Solución

i) f es continua en $[0;3]$.

ii) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3}$, esto es, f es derivable en $\langle 0;3 \rangle$.

iii) $f(0) = f(3) = 0$.

Entonces, por el teorema de Rolle, $\exists\, c \in \langle 0;3 \rangle$ tal que

$$f'(c) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{c} - \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} = 0, \text{ de donde } c = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 8. ¿Es posible aplicar el Teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x - 3}$ en el $[0;9]$?

Solución

Aunque $f(0) = f(9) = 0$, no es posible aplicar el Teorema de Rolle porque f no es continua en $x = 3$. Es conveniente aclarar que si a una función no se le puede aplicar el Teorema de Rolle en un intervalo, no significa que no existe un valor dentro del intervalo para el cual su derivada sea igual a cero.

www.FreeLibros.com

6.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO (O DE LAGRANGE)

Teorema del Valor Medio (T.V.M.) Sea $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ una función tal que
a) f es continua en $[a;b]$
b) f es derivable en $\langle a;b\rangle$

Entonces, existe $c \in \langle a;b\rangle$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración

Sea m la pendiente de la recta que pasa por $A(a;f(a))$ y $B(b;f(b))$, entonces

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Luego, la ecuación de dicha recta es $g(x) = f(a) + m(x-a)$.

Ahora, consideremos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - m(x-a), \quad x \in [a;b]$$

F satisface las condiciones del teorema de Rolle en $[a;b]$, pues F es continua en $[a;b]$, es derivable en $\langle a;b\rangle$ y $F(a) = F(b) = 0$. Luego, en virtud del teorema de Rolle, existe $c \in \langle a;b\rangle$ tal que $F'(c) = 0$.

Como $F'(x) = f'(x) - m \Rightarrow F'(c) = f'(c) - m = 0$, de donde $m = f'(c)$. Por consiguiente, existe $c \in \langle a;b\rangle$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

6.4.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si la función f satisface las hipótesis del T.V.M., podemos asegurar que existe por lo menos un punto $P(c;f(c))$, con $P \neq A(a;f(a))$ y $P \neq B(b;f(b))$, donde la recta tangente es paralela a la cuerda $\overline{AB}$ (Fig. 6.8).

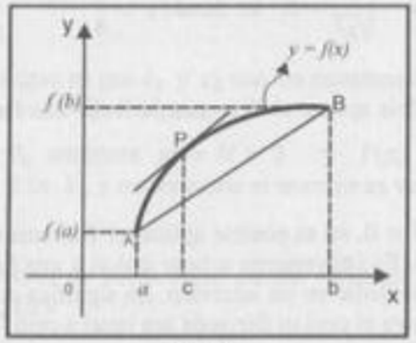


Fig. 6.8

Corolario 1

Sea $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ una función tal que
a) f es continua en $[a;b]$
b) f es derivable en $\langle a;b\rangle$ y $f'(x) = 0$, $\forall x \in \langle a;b\rangle$

Entonces, f es constante en $[a;b]$, esto es, $f(x) = k$, $\forall x \in [a;b]$.

Demostración

Sea $x \in \langle a;b\rangle$ un elemento arbitrario. Las condiciones del T.V.M. son verificadas por f en $[a;x] \subset [a;b]$. Luego, existe $c \in \langle a;x\rangle$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a), \text{ con } a < c < x < b$$

De la parte b) corolario, se tiene $f'(c) = 0$. Luego, $f(x) - f(a) = 0$, es decir, $f(x) = f(a) = k$. Puesto que x fue tomado arbitrariamente, entonces $f(x) = k$, $\forall x \in [a;b\rangle$.

Como f es continua en $[a;b]$, se concluye que

$$f(x) = k\,, \ \forall x \in [a;b] \quad (k \text{ constante})$$

Corolario 2

Si f es derivable en $\langle a;b\rangle$ y $f'(x) = 0$, $\forall x \in \langle a;b\rangle$, entonces $f(x) = k$, $\forall x \in \langle a;b\rangle$ (k constante).

Corolario 3

Sean f y g dos funciones definidas en $[a;b]$ tales que
a) f y g son continuas en $[a;b]$.
b) f y g son derivables en $\langle a;b\rangle$ y $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \langle a;b\rangle$.

Entonces, f y g difieren en una constante, esto es,

$$f(x) = g(x) + k\,, \ \forall x \in [a,b] \quad (k \text{ constante})$$

Demostración

Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a;b]$.
h es continua en $[a;b]$, es derivable en $\langle a,b\rangle$ y
$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \forall x \in \langle a;b\rangle$.
Por el corolario 1, $h(x) = k$, $\forall x \in [a;b]$ (k constante).
Por tanto, $f(x) = g(x) + k$, $\forall x \in [a;b]$.

Observación 5

Si el intervalo no es abierto, el corolario 2 no necesariamente es verdadero. Por ejemplo, si $f(x) = [\![x]\!]$, entonces $f'(x) = 0$, $\forall x \in \langle \mathbb{R} - \mathbb{Z}\rangle$. Este ejemplo nos muestra que si la derivada es cero en un determinado conjunto, entonces la función no necesariamente es constante en dicho conjunto. Sin embargo, si el conjunto es un intervalo abierto, entonces el corolario 2 afirma que la función es constante en dicho intervalo.

www.FreeLibros.com

Observación 6

El corolario 3 nos indica que si f y g son dos funciones derivables en un intervalo abierto I y tienen la misma derivada en I, entonces sus gráficas son "curvas paralelas" (Fig. 6.9).

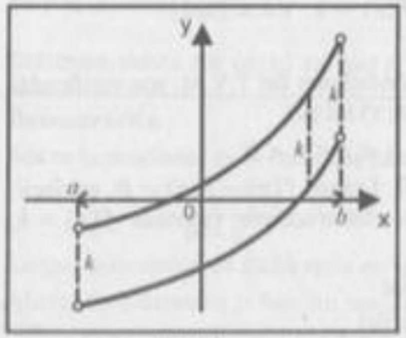


Fig. 6.9

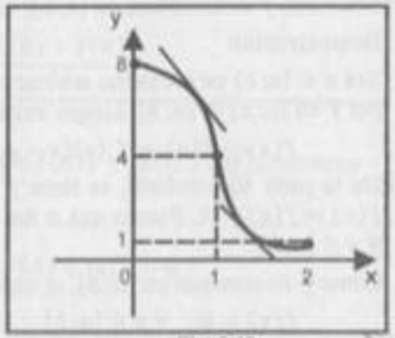


Fig. 6.10

Ejemplo 9 Si $f(x) = \begin{cases} 8 - 4x^2, & x \leq 1 \\ 4x^{-2}, & x > 1 \end{cases}$, ¿es aplicable el T.V.M. a esta función en $[0; 2]$? Si es así, determine el valor o los valores que lo verifican.

Solución

a) Solo es necesario verificar la continuidad de f en $x = 1$.

Puesto que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1)$, entonces f es continua en $x = 1$.

Luego, f es continua en $[0; 2]$.

b) Como $f'(x) = \begin{cases} -8x, & \text{si } x < 1 \\ -8x^{-3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $f'(1^-) = f'(1^+) = -8$, entonces f es derivable en $(0; 2)$. Dado que f satisface las condiciones del T.V.M. en $[0; 2]$, existe $c \in (0; 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 8}{2} = -\frac{7}{2}$$

Como $f'(1) = -8$, entonces $c \neq 1$.

Si $c < 1 \Rightarrow f'(c) = -8c = -7/2 \Rightarrow c = 7/16 \in (0; 2)$.

Análogamente, si $c > 1 \Rightarrow f'(c) = -8c^{-3} = -7/2 \Rightarrow c = \sqrt[3]{16/7} \in (0; 2)$.

Por lo tanto, los valores que verifican el T.V.M. son $c_1 = 7/16$ y $c_2 = \sqrt[3]{16/7}$.

La gráfica de f se muestra en la Fig. 6.10.

Ejemplo 10 Sea $f(x) = x^3 - x^2$, $x \in [-1; 3]$. Determine el valor que satisface el T.V.M.

Solución

f es continua en $[-1; 3]$ y f es derivable en $(-1; 3)$.

En virtud al T.V.M., existe $c \in (-1; 3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{18 - (-2)}{4} = 5$$

Como $f'(x) = 3x^2 - 2x$, entonces $f'(c) = 3c^2 - 2c = 5$.

Las soluciones de esta ecuación son $c_1 = -1$ y $c_2 = 5/3$.

Por consiguiente, el valor que satisface el T.V.M. es $c = 5/3$.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 5, compruebe si se cumple el Teorema de Rolle para las funciones dadas en el intervalo que se indica. Si así fuera, halle los valores que lo satisfacen.

1) $f(x) = x^2 - 4x$ en $[0; 4]$ — R. 2

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[1; 3]$ — R. 2

3) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ en $[-1/4; 1]$ — R. 1/2

4) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ en $[-1; 1]$ — R. No

5) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ en $[-2; 2]$ — R. 0; $\pm\sqrt{2,5}$

En los ejercicios del 6 al 9, ¿es posible aplicar el Teorema de Rolle a las funciones dadas?

6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x + 2}$

8) $f(x) = x^3 - 3x$

9) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

En los siguientes ejercicios, del 10 al 24, determine si el T.V.M. es aplicable a la función dada en el intervalo que se indica. En caso afirmativo, encuentre los valores que lo verifican; en caso contrario, dar una razón que justifique su respuesta. Además, construya la gráfica de cada función.

10) $f(x) = x^2 + 2x$, en $[-2; 0]$ — R. -1

11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, en $[0; 4]$ — R. $\sqrt{3}$

12) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 5$, en $[-2; 2]$ — R. -1; $4/3$

www.FreeLibros.com

13) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, en $[2;4]$ R. $1+\sqrt{3}$

14) $f(x) = |4-x^2|$, en $[-2;2]$ R. 0

15) $f(x) = |9-4x^2|$, en $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ R. 0

16) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x<3 \\ 15-2x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, en $[-1;5]$ R. no es aplicable

17) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x>1 \end{cases}$, en $[0;2]$ R. $\dfrac{1}{2};\sqrt{2}$

18) $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & -2 \leq x < 0 \\ 4-x^3, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{6}{x^2+1}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, en $[-2;2]$

19) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2}, & x \leq -1 \\ 8-4x^2, & x>-1 \end{cases}$, en $[-2;0]$

20) $f(x) = \begin{cases} |x^2-9|, & x<2 \\ 5+2\sqrt{x-2}, & 2 \leq x < 11 \\ 11+(x-11)^3, & x \geq 11 \end{cases}$, en $[-4;12]$

21) $f(x) = \begin{cases} -|x^2-9|, & x<2 \\ -5+2\sqrt{x-2}, & 2 \leq x \leq 11 \\ 1+(x-11)^3, & x>11 \end{cases}$, en $[-4;12]$

22) $f(x) = \dfrac{|x|^3}{1+x^6}$, en $[-2;2]$ R. $-1;0;1$

23) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$, en $[-9;-4]$

24) $f(x) = \dfrac{x^2}{4+|x|}$, en $[-1;2]$

25) En las funciones dadas en los ejercicios del 10 al 24, halle los puntos críticos.

26) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Se dice que c es un punto fijo de f si $f(c)=c$.

a) Determine los puntos fijos de $f(x) = x^3-8x$.

b) ¿$f(x) = x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$, tiene puntos fijos?

c) Suponiendo que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene derivada $f'(x)\neq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, pruebe que f admite a lo más un punto fijo.

6.5 FÓRMULAS DE TAYLOR Y MACLAURIN

En esta sección, se demostrará que las funciones derivables hasta el orden n pueden ser aproximadas por polinomios de grado n.

6.5.1 POLINOMIO DE APROXIMACIÓN

Sea $y=f(x)$ una función definida en una vecindad del punto a y que es derivable hasta el orden n en este punto. Se desea encontrar un polinomio $P_n(x)$ de grado n en las potencias de $(x-a)$, es decir,

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n \qquad (\alpha)$$

con las siguientes condiciones:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k=1,2,\ldots,n \qquad (\beta)$$

Esto es, los valores $P_n(x)$ y $f(x)$ en $x=a$ son iguales y los valores de sus derivadas de orden n en este punto son iguales.

Es de suponer que este polinomio, de alguna manera, estará próximo a la función $f(x)$ en una vecindad de a.

Calculando el valor de $P_n(x)$ y de sus derivadas de orden superior en el punto $x=a$, se tiene:

$$P_n(a) = b_0,\ P_n^{(k)}(a) = b_k k!, \quad k=1,2,\ldots,n \qquad (\gamma)$$

Observando (α), (β) y (γ) se concluye que

$$b_0 = f(a),\ b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k=1,2,\ldots,n$$

Por lo tanto, el polinomio buscado es:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (\mathrm{I})$$

Este polinomio se llama **polinomio de aproximación de $f(x)$ en torno a $x=a$.**

6.5.2 POLINOMIO DE APROXIMACIÓN DE UN POLINOMIO

Cuando la función $f(x)$ es a su vez un polinomio de grado n y $P_n(x)$ es su polinomio de aproximación dado por (I), la diferencia $R(x) = f(x) - P_n(x)$ es un polinomio para el cual se cumple:

$$R(a) = R'(a) = \ldots = R^{(n)}(a) = 0 \qquad (*)$$

Esto significa que a es una raíz de multiplicidad de por lo menos de grado $(n+1)$ de $R(x)$. Sin embargo, como $R(x)$ es a lo más de grado n, $(*)$ será posible solo si $R(x)=0$, de donde $f(x) = P_n(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$; es decir, el polinomio de aproximación de un polinomio es el mismo polinomio. En otras palabras, es el mismo polinomio con diferente escritura.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 11. Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 2$, halle el polinomio de aproximación de $f(x)$ de grado 3, en torno de $a = 1$.

Solución

$f(1) = 3,\ f'(1) = 4,\ f''(1) = 0,\ f'''(1) = 6$ y $f^{n}(1) = 0,\ \forall n \geq 4$

Aplicando (I), se obtiene $P_3(x) = 3 + 4(x-1) + (x-1)^3$.

Se observa que $P_3(x)$ es el mismo polinomio $f(x)$ (con diferente escritura).

Ejemplo 12

Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Determine el polinomio de aproximación de grado 5 en torno de $a = 0$.

Solución

Considerando que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \forall n \geq 1$, se obtiene

$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 2!,\ f'''(0) = -3!,\ f^{(4)}(0) = 4!$ y $f^{(5)}(0) = -5!$

Luego, $P_5(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$.

6.5.3 FÓRMULAS DE TAYLOR Y DE MACLAURIN CON RESTO DE LAGRANGE

Si $f(x)$ no es un polinomio, consideremos la diferencia entre la función y su polinomio de aproximación

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

A esta diferencia $R_n(x)$ se denomina **resto de orden n de $f(x)$**. Nuestro objetivo es calcular este resto, que puede ser interpretado como el error que se comete cuando se sustituye $f(x)$ por $P_n(x)$ en una vecindad de a.

Teorema 1 (Resto De Lagrange)

Sea f una función derivable hasta el orden $n+1$ en una vecindad $B(a;\delta)$ del punto a y sea $P_n(x)$ su polinomio de aproximación.

Si $x \in B(a;\delta)$, existe c comprendido entre x y a, esto es, $c = a + \theta(x-a)$ (con $0 < \theta < 1$) tal que

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{ó}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \text{con } 0 < \theta < 1$$

Este resto se denomina **Resto de Lagrange**.

Demostración

Sea $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. De ello, se deduce que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Escribiendo $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x)$, donde $Q(x)$ es la función que debemos hallar, tenemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \quad (**)$$

Para valores de a y x fijos, $Q(x)$ tiene un valor constante que denotaremos con Q. Para t (t entre a y x) definimos

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q$$

donde Q es la constante determinada por (**) cuando a y x son fijos. Como f es derivable hasta el orden $(n+1)$, existe $F'(t)$ y

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{(x-t)}{1!}f''(t) + \frac{2f''(t)}{2!}(x-t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) - \cdots$$

$$\cdots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n +$$

$$+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q$$

Simplificando, se obtiene

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!}Q$$

En consecuencia, F es derivable en todo t entre a y x. Como $F(x) = F(a) = 0$, F satisface las condiciones del Teorema de Rolle. Entonces, existe c entre a y x para el cual $F'(c) = 0$, es decir,

$$-\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) + \frac{(x-c)^n}{n!}Q = 0$$

Luego, $Q = f^{(n+1)}(c)$. Reemplazando este valor en $R_n(x)$, se obtiene

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

www.FreeLibros.com

En conclusión,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ con } 0<\theta<1$$

Esta fórmula se denomina **Fórmula de Taylor** para la función $f(x)$ en el punto a. Haciendo $a = 0$, se obtiene la **Fórmula de Maclaurin** para la función $f(x)$, esto es,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

con $0<\theta<1$

Es evidente que si $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de $f(x)$. Así, la fórmula (I) permite sustituir $y = f(x)$ por $y = P_n(x)$, y el error cometido es el valor de $R_n(x)$.

6.7.4 COTA SUPERIOR DEL ERROR

Si la función f es derivable hasta el orden $(n+1)$ en una vecindad $B(\cdot;\delta)$ y si existe $M>0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $\forall x \in B(a;\delta)$, entonces se tiene

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Esta fórmula nos permite calcular, para n fijo, una cota superior del error que se comete cuando se aproxima $f(x)$ por $P_n(x)$, la cual es

$$M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejemplo 13. Aplique la Fórmula de Taylor para $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ cuando $a = 1$.

Solución

Tenemos $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n 2^{n-1} n!}{(2x+1)^{n+1}}$, $\forall n \geq 1$ y $x \neq -\dfrac{1}{2}$

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n 2^{n-1} n!}{3^{n+1}}$$

Luego, $f^{n+1}[1+\theta(1-x)] = \dfrac{(-1)^{n+1}2^n(n+1)!}{[3+2\theta(1-x)]^{n+2}}$ y

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}2^n(x-1)^{n+1}}{[3+2\theta(1-x)]^{n+2}}, \text{ con } 0<\theta<1$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{x-1}{3^2} - \frac{2(x-1)}{3^3} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{3^{n+1}}(x-1)^n + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{[3+2\theta(1-x)]^{n+2}}$, con $0<\theta<1$

Ejemplo 14. Desarrolle $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ por la Fórmula de Maclaurin.

Solución

Como $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, $\forall x \neq -1$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!, \ \forall n \geq 1$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+\theta x)^{n+2}}, \ 0<\theta<1$$

Luego, por la Fórmula de Maclaurin, tenemos

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$$

Ejemplo 15 Aplique la Fórmula de Maclaurin a $f(x) = \sqrt{1+x}$ cuando $n = 2$.

Solución

Se tiene:

$$f(0) = 1, \ f'(0) = \frac{1}{2}, \ f''(0) = -\frac{1}{4} \ \text{ y } \ f'''(\theta x) = \frac{3}{8}(1+\theta x)^{-5/2}$$

Por la Fórmula de Maclaurin, se tiene

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}, \quad 0<\theta<1$$

Ejemplo 16. Halle una cota superior para el error que se comete al considerar $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, cuando $x = 0{,}2$

Solución

De lo obtenido en ejemplo 15, tenemos

$$R_3(x) = \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$$

Para $x = 0{,}2$ y $0<\theta<1$, el error $R_3(0{,}2)$ se acota como sigue:

$$R_3(0{,}2) = \frac{(0{,}2)^3}{16(1+\theta(0{,}2))^{5/2}} < \frac{(0{,}2)^3}{16} = 0{,}0005$$

Luego, el error que se comete no es superior a 0,0005.

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

1) Desarrolle $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ por la Fórmula de Maclaurin cuando α no es entero y $x > -1$.

2) Escriba los siguientes polinomios en potencias de $x - 1$.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 4$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 2$

3) Escriba el polinomio $f(x) = (1+x)^n$ en potencias de x.

4) Aplique la Fórmula de Taylor a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $a = 1$ y $n = 3$.

En los ejercicios del 5 al 10, aplique la Fórmula de Maclaurin a las funciones dadas para el valor de n que se indica.

5) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $n = 3$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $n = 4$

7) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $n = 4$

8) $f(x) = \dfrac{4}{1-x^2}$, $n = 5$

9) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2-4}$, $n = 4$

10) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, $n = 4$

7 APLICACIONES DE LA DERIVADA

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, veremos las aplicaciones de los teoremas del capítulo y estudiaremos nuevos teoremas que nos permitirán analizar la variación de una función, determinando los intervalos de crecimiento, los valores extremos relativos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. Con esta información y con la ayuda de las asíntotas, estaremos en condiciones de construir la gráfica de una función.

7.2 FUNCIONES MONÓTONAS

Definición 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función e $I \subset D_f$.

a) Se dice que f es **no decreciente** en I cuando $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \le f(x_2)$ (Fig. 7.1).

b) Se dice que f es **no creciente** en I cuando $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \ge f(x_2)$ (Fig. 7.2).

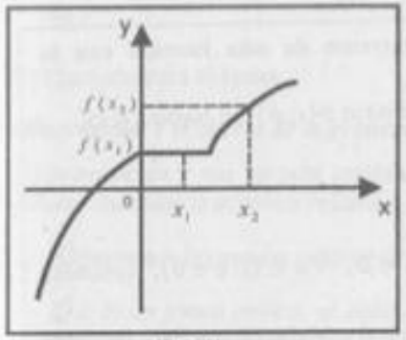


Fig. 7.1

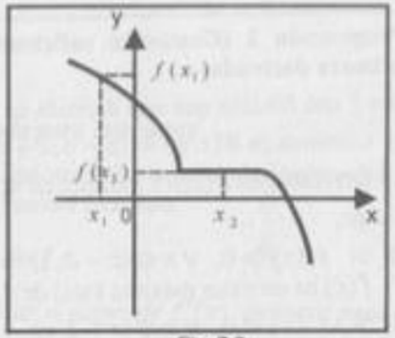


Fig. 7.2

c) Se dice que f es **creciente** en I cuando $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$ (Fig. 7.3).

d) Se dice que f es **decreciente** en I cuando $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_2) < f(x_1)$ (Fig. 7.4).

En cualquiera de los cuatro casos, se dice que f es **monótona** en I.

www.FreeLibros.com

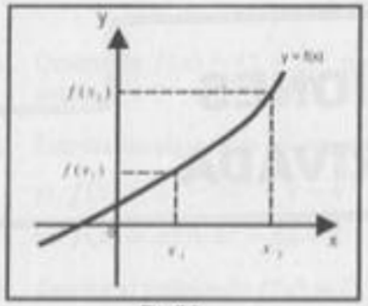


Fig. 7.3

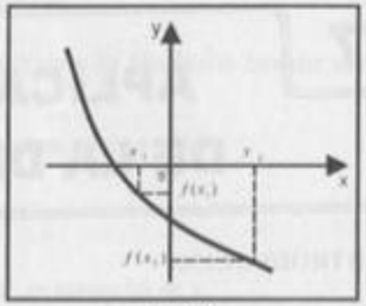


Fig. 7.4

Proposición 1

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $[a;b]$ y derivable en $\langle a;b\rangle$.

I) Si $f'(x)>0,\ \forall x\in\langle a;b\rangle$, entonces f es creciente en $[a;b]$.

II) Si $f'(x)<0,\ \forall x\in\langle a;b\rangle$, entonces f es decreciente en $[a;b]$.

Demostración

I) Sean $x_1, x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$. Las condiciones a) y b) del T.V.M. se verifican en el intervalo $[x_1,x_2]\subset[a,b]$. Luego, por el T.V.M., existe $c\in\langle x_1,x_2\rangle$ tal que $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$.

Como $f'(c)>0$ y $x_2-x_1>0$, entonces $f(x_2)-f(x_1)>0$, de donde $f(x_1)<f(x_2)$. Por tanto, f es creciente en $[a;b]$.

II) Ejercicio para el lector.

Proposición 2 (Condición suficiente de extremo de una función con la primera derivada)

Sea f una función que está definida en una vecindad $B(c;\delta)$ del punto c y es:

a) Continua en $B(c;\delta)=\langle c-\delta;c+\delta\rangle$.

b) Derivable en $B(c;\delta)$, excepto tal vez en c.

Luego,

I) Si $f'(x)>0,\ \forall x\in\langle c-\delta;c\rangle$ y $f'(x)<0,\ \forall x\in\langle c;c+\delta\rangle$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

II) Si $f'(x)<0,\ \forall x\in\langle c-\delta;c\rangle$ y $f'(x)>0,\ \forall x\in\langle c;c+\delta\rangle$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Demostración

I) De las hipótesis y por la proposición 1, f es creciente en $\langle c-\delta;c\rangle$ y es decreciente en $\langle c;c+\delta\rangle$. Luego, $f(x)\le f(c),\ \forall x\in B(c;\delta)$, de donde se deduce que $f(c)$ es un valor máximo local de f.

II) Ejercicio para el lector.

Proposición 3 (Condición suficiente de extremo de una función con la segunda derivada)

Sea f una función tal que

a) Tiene derivadas hasta el segundo orden continuas en una vecindad $B(c;\delta)$ del punto c.

b) $f'(c)=0$

c) $f''(c)\neq 0$

Luego,

I) Si $f''(c)<0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

II) Si $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Demostración

I) Como $f'(c)=0$, por definición, $f''(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(c+h)}{h}$.

Considerando la continuidad de f'' en c y el hecho de que $f''(c)<0$, se tiene:

Para $h<0$ (suficientemente pequeño), $f'(c+h)>0$, es decir,

$$f'(x)>0,\ \forall x\in\langle c-\delta_1;c\rangle \qquad (1)$$

Para $h>0$ (suficientemente pequeño), $f'(c+h)<0$, es decir,

$$f'(x)<0,\ \forall x\in\langle c;c+\delta_1\rangle \qquad (2)$$

De (1), (2) y la proposición 2 se concluye que $f(c)$ es un valor máximo local de f.

II) Ejercicio para el lector.

Observación 1 (Criterio de la primera derivada para extremos)

La proposición 2 nos permite establecer el siguiente criterio para determinar los valores máximos o mínimos relativos de una función continua.

1) Determinar los puntos críticos de la función f.

2) Si c es un punto crítico, se debe determinar el signo de $f'(x)$, primero para valores que están antes de c (lo suficientemente próximo,) y luego para valores que están después de c (lo suficientemente próximo).

a) Si el signo cambia de " − " a " + ", $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

b) Si el signo cambia de " + " a " − ", $f(c)$ es un valor máximo relativo.

c) Si no existe cambio de signo, no existe ni máximo ni mínimo relativo en c.

www.FreeLibros.com

Observación 2 (Criterio de la segunda derivada para extremos)

En virtud de la proposición 3, podemos establecer el siguiente criterio:

1) Determinar los puntos críticos de la función f.

2) Si c es un punto crítico, hallar $f''(c)$.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

b) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo.

c) Si $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe, el criterio es inconsistente.

Ejemplo 1. Determine los intervalos de crecimiento y los valores extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) Para determinar los intervalos de crecimiento, por la proposición 1, es suficiente hallar los intervalos donde f' es positiva o negativa.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

Puntos críticos: $x = -1$ y $x = 3$.

El análisis de los signos de la derivada se muestra en la siguiente tabla.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Valores Extremos
$\langle -\infty; -1 \rangle$	+	creciente	$f(-1) = 7$ máx. relativo
$\langle -1; 3 \rangle$	−	decreciente	
$\langle 3; +\infty \rangle$	+	creciente	$f(3) = -25$ mín. relativo

La gráfica de la función se muestra en la fig. 7.5.

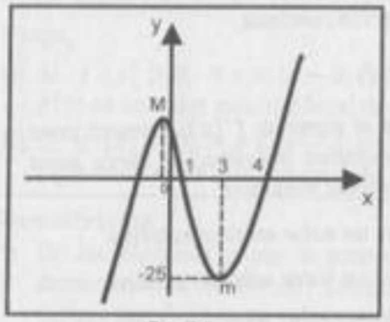


Fig. 7.5

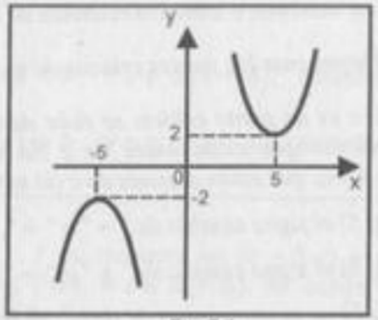


Fig. 7.6

Ejemplo 2. Dada la función $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{x}{5}$, halle los intervalos de crecimiento y sus extremos locales.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+5)}{5x^2}$

c) Puntos críticos: $x = -5$ y $x = 5$ ($x = 0$ no es punto crítico, pues $0 \notin D_f$).

En la siguiente tabla, se muestra el análisis de los signos de la derivada.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -5 \rangle$	+	creciente	
$\langle -5; 0 \rangle$	−	decreciente	$f(-5) = -2$ máx. rel.
$\langle 0; 5 \rangle$	−	decreciente	$f(0) = 12$ mín. rel.
$\langle 5; +\infty \rangle$	+	creciente	

La gráfica de la función se muestra en la Fig. 7.6.

Ejemplo 3 Si $f(x) = x^{2/3}(x+3)^{1/3}$, halle sus valores extremos locales.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $f'(x) = \dfrac{x+2}{x^{1/3}(x+3)^{2/3}}$

c) Puntos críticos: $x = -3$, $x = -2$ y $x = 0$.

Signo de $f'(x)$: + (antes de -3), + (entre -3 y -2), − (entre -2 y 0), + (después de 0); $D_f = \mathbb{R}$

Observamos que en $x = -3$ y $x = 0$ no existe la derivada (la derivada se hace infinita). Geométricamente, significa que la gráfica presenta una tangente vertical en estos puntos. La gráfica de la función se muestra en la Fig. 7.7.

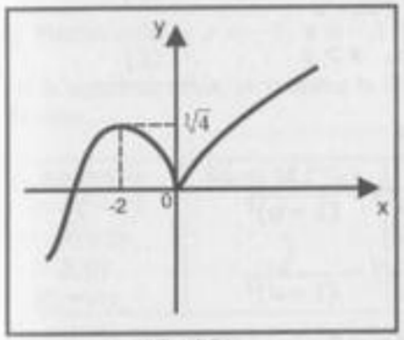


Fig. 7.7

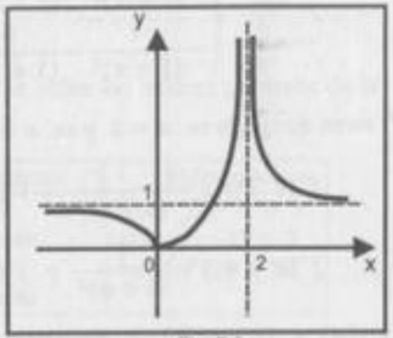


Fig. 7.8

www.FreeLibros.com

Ejemplo 4. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$, halle los valores extremos relativos de f.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ b) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^3}$

c) Punto crítico: $x = 0$

El análisis de los signos de la derivada se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; 0\rangle$	$-$	decreciente	
$\langle 0; 2\rangle$	$+$	creciente	mín. $f(0) = 0$
$\langle 2; +\infty\rangle$	$-$	decreciente	

En la función, se observa que $x = 2$ es asíntota vertical e $y = 1$ es asíntota horizontal (a la derecha y a la izquierda). Su gráfica se muestra en la Fig. 7.8.

Ejemplo 5 Sea $a > 0$. Demuestre que el valor máximo absoluto de

$f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-a|}$ es $\dfrac{2+a}{1+a}$.

Solución

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & 0 \le x < a \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a}, & x \ge a \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x < 0 & (A) \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0 < x < a & (B) \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & x > a & (C) \end{cases}$$

f no es derivable en $x = 0$ y en $x = a$, pues

$$f'(0^-) = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} \text{ y } f'(0^+) = -1 + \frac{1}{(1+a)^2}$$

$$f'(a^-) = 1 - \frac{1}{(1+a)^2} \text{ y } f'(a^+) = -1 - \frac{1}{(1+a)^2}$$

De (A) y (C) se sigue que $f'(x) > 0,\ \forall x < 0$. y $f'(x) < 0,\ \forall x > a$, respectivamente.

La única posibilidad para que $f'(x) = 0$ está en (B). De esta parte se obtiene que $f'(x) = 0$ si $x = a/2$.

En resumen, los puntos críticos son $x = 0$, $x = a/2$ y $x = a$.

En la siguiente tabla, se muestra el análisis de los signos de la derivada.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; 0\rangle$	$+$	creciente	máx. local $f(0)$
$\langle 0; a/2\rangle$	$-$	decreciente	mín. local $f(a/2)$
$\langle a/2; a\rangle$	$+$	creciente	máx. local $f(a)$
$\langle a; +\infty\rangle$	$-$	decreciente	

Valor máximo local de f es $f(0) = \dfrac{a+2}{a+1} = f(a)$.

Valor mínimo local de f es $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{4}{2+a}$

Considerando la continuidad de f y el hecho de que $f(a/2) < f(a)$, se concluye que el valor máximo absoluto de f es $f(a) = \dfrac{a+2}{a+1}$.

Ejemplo 6 Halle los valores extremos de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-(x+7)^2}, & \text{si } x \le -3 \\ 12 - x^2, & \text{si } x > -3 \end{cases}$

Solución

a) $D_f = [-12; +\infty\rangle$

b) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+7}{\sqrt{25-(x+7)^2}}, & x < -3 \\ -2x, & x > -3 \end{cases}$

c) Puntos críticos: $x = -7$, $x = -3$ y $x = 0$.

En la siguiente tabla, se muestra la información sobre los valores extremos de la función.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -12; -7\rangle$	$+$	creciente	máx. $f(-7) = 5$
$\langle -7; -3\rangle$	$-$	decreciente	mín. $f(-3) = 3$
$\langle -3; 0\rangle$	$+$	creciente	máx. $f(0) = 12$
$\langle 0; +\infty\rangle$	$-$	decreciente	

La gráfica de f se muestra en la figura 7.9.

www.FreeLibros.com

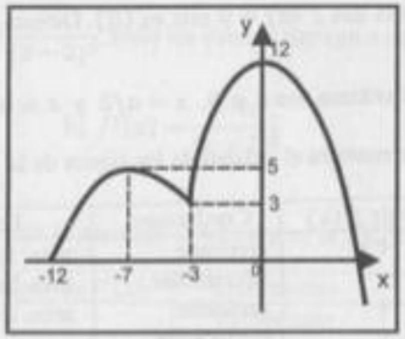


Fig. 7.9

Ejemplo 7. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, halle los valores de a, b, c y d de manera que la función presente extremos relativos en $(1; 2)$ y $(2; 3)$.

Solución

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Como $x = 1$ y $x = 2$ son puntos críticos de f, entonces

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \qquad (1)$$
$$f'(2) = 12a + 4b + c = 0 \qquad (2)$$

También se tiene:

$$f(1) = a + b + c + d = 2 \qquad (3)$$
$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 3 \qquad (4)$$

Resolviendo las cuatro ecuaciones, resulta $a = -2,\ b = 9,\ c = -12$ y $d = 7$.

Ejemplo 8. Si $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, determine los valores de a, b y c de modo que la función tenga un valor extremo relativo en $x = 1/2$ y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ sea $2x - y + 4 = 0$.

Solución

Teniendo en cuenta las condiciones del problema, se tiene

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b = 0 \qquad (x = 1/2 \text{ es punto crítico})$$
$$f'(-1) = -4a - 2b = 2 \qquad (m = 2 \text{ es la pendiente de la recta tangente})$$
$$f(-1) = a + b + c = 2 \qquad (\text{en la recta tangente para } x = -1\text{ , } y = 2)$$

Resolviendo las tres últimas ecuaciones, se obtiene

$$a = -\frac{2}{3},\ b = \frac{1}{3}\ \text{ y }\ c = \frac{7}{3}$$

Observación 3** **(Criterio para los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado)

Si f es una función continua en $[a; b]$, por el Teorema de Weierstrass (Teorema 6 Cap. 4), f presenta valores extremos absolutos.

Para hallar sus valores extremos absolutos, considerando que estos pueden estar en los extremos del intervalo, es suficiente agregar a los puntos críticos los puntos a y b. Luego, se debe comparar los valores que toma f en cada uno de estos puntos; el mayor es el valor máximo absoluto y el menor, el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 9. Halle los valores extremos absolutos de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 10$ en el intervalo $[0; 4]$.

Solución

a) f es continua en el intervalo $[0; 4]$. Su gráfica se muestra en la figura 7.10.

b) $f'(x) = 3(x - 2)(x + 4)$

c) Puntos de análisis: $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$ (0 y 4 son los extremos del intervalo y $-4 \notin [0; 4]$).

d) Como $f(0) = -10$, $f(2) = -32$, $f(4) = 6$, entonces
   Valor máximo absoluto: $f(4) = 6$
   Valor mínimo absoluto: $f(2) = -32$

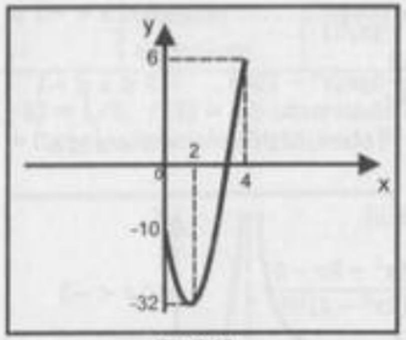


Fig. 7.10

Ejemplo 10 Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de

$$f(x) = -\frac{4|x|}{1 + x^2}\ ,\ x \in [-4; 2]$$

Solución

a) f es continua en $[-4; 2]$. Su gráfica se muestra en la Fig. 7.11.

www.FreeLibros.com

b) $f'(x) = \dfrac{4x(x^2 - 1)}{|x|(1 + x^2)^2}$

c) Puntos de análisis en $[-4; 2]$: $x = -4$, $x = 2$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

$f(-4) = -16/17$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = -8/5$

Valor máximo absoluto: $f(0) = 0$

Valor mínimo absoluto: $f(1) = f(-1) = -2$

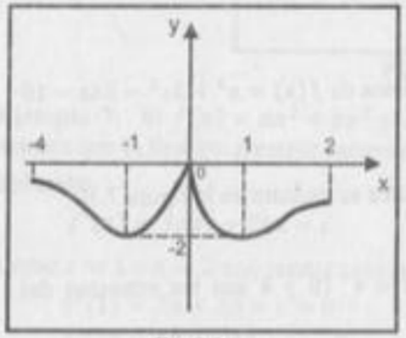


Fig. 7.11

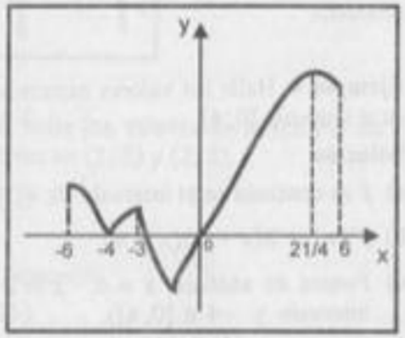


Fig. 7.12

Ejemplo 11. Determine los valores extremos absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+4|^3}{\sqrt{2x^2 + [\![x/3]\!]}}, & -6 \le x < -3 \\ \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{13}{36}\operatorname{Sgn}(x^4 - 256), & -3 \le x \le -1 \\ -\dfrac{95}{72}x^{3/5}(4x - 28)^{1/5}, & -1 < x \le 6 \end{cases}$$

Solución

a) f es continua en $[-6; 6]$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+4)^5(4x^2 - 8x - 6)}{|x+4|^3(2x^2 - 2)^{3/2}}, & -6 < x < -3 \\ -\dfrac{9}{x^4}, & -3 < x < -1 \\ -\dfrac{95}{72}\left[\dfrac{16x - 84}{5x^{2/5}(4x - 28)^{4/5}}\right], & -1 < x < 6 \end{cases}$$

c) Puntos críticos: $x = -6$, $x = -4$, $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 21/4$ y $x = 6$

d) Evaluando f en cada uno de estos puntos, se obtiene que el valor máximo absoluto es $f(21/4) = 5{,}27$ y el valor mínimo absoluto es $f(-1) = -2{,}64$.

Para trazar la gráfica de esta función (Fig. 7.12), construimos la siguiente tabla:

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -6; -4 \rangle$	$-$	decreciente	
$\langle -4; -3 \rangle$	$+$	creciente	$f(-4)$ es mín. relat.
$\langle -3; -1 \rangle$	$-$	decreciente	$f(-3)$ es máx. relat.
$\langle -1; 0 \rangle$	$+$	creciente	$f(-1)$ es mín. relat.
$\langle 0; 21/4 \rangle$	$+$	creciente	$f(21/4)$ es máx. relat.
$\langle 21/4; 6 \rangle$	$-$	decreciente	

Ejemplo 12. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$. Halle sus valores máximo y mínimo absolutos en $[-1; 4]$, si existen.

Solución

f no es continua en $[-1; 4]$, pues no es continua en $x = 2$. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$, $x = 2$ es asíntota vertical y la función no tiene valor máximo absoluto. No es posible aplicar la observación 3, pues la función no es continua en $[-1; 4]$.

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^3}, \quad \text{para } x \ne 2$$

El único punto crítico es $x = 0$. De este modo, se tiene la siguiente tabla:

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -1; 0 \rangle$	$-$	decreciente	
$\langle 0; 2 \rangle$	$+$	creciente	$f(0) = 0$ mín. relat.
$\langle 2; 4 \rangle$	$-$	decreciente	

Considerando que $f(-1) = 1/9$, $f(4) = 4$ y observando la gráfica (Fig. 7.13), se concluye que $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto de f.

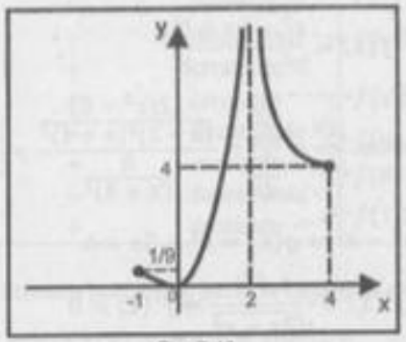


Fig. 7.13

www.FreeLibros.com

Ejemplo 13. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{2/3}(x+2)^{1/3} - x, & x < 0 \\ \sqrt{2x - x^2}, & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 6x + 8}, & -2 < x < 4 \\ \sqrt[4]{52x^2 - x^4 - 576}, & 4 \le x \le 6 \\ (x-6)^{1/3}(x-12)^{2/3}, & x > 6 \end{cases}$$

a) Halle $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - x}{x - 1}$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 12^+} \dfrac{f(x)}{x - 12}$.

c) Si $-2 < x < 4$, halle la derivada de $y = f(x)$ con respecto a $\dfrac{x-4}{x+4}$.

d) Halle $g'[f'(1)]$, si $g(x+2) = x^2 - x$.

e) Verifique si el T.V.M. se aplica a $f(x)$ en $[4;6]$. Si es así, determine el valor que lo verifica.

f) Determine los intervalos de continuidad de f.

g) Halle los valores extremos de f.

h) Halle las asíntotas de $y = f(x)$.

i) Esboce la gráfica de f.

Solución

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^2} - x}{x - 1} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 12^+} \dfrac{f(x)}{x - 12} = \lim\limits_{x \to 12^+} \dfrac{(x-6)^{1/3}}{(x-12)^{1/3}} = +\infty$

c) Para $-2 < x < 4$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 6x + 8}$

Sea $u = \dfrac{x-4}{x+4}$, entonces $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} = \dfrac{\dfrac{12(x^2-8)}{(x+2)^2(x+4)^2}}{\dfrac{8}{(x+4)^2}} = \dfrac{3(x^2-8)}{2(x+2)^2}$.

d) Como $g(x+2) = x^2 - x \Rightarrow g(x) = x^2 - 5x + 6$

Para $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}} \Rightarrow f'(1) = 0$

Por tanto, $g'[f'(1)] = g'(0) = -5$, pues $g'(x) = 2x - 5$.

e) Si $x \in [4;6]$, $f(x) = \sqrt[4]{52x^2 - x^4 - 576}$, f es continua en $[4;6]$ y

$$f'(x) = \frac{x(26 - x^2)}{(x^2 - 36)^{3/4}(16 - x^2)^{3/4}}, \ \forall x \in \langle 4;6 \rangle$$

Por el T.V.M., existe $c \in \langle 4;6 \rangle$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(6) - f(4)}{6 - 4} \Rightarrow c = \sqrt{26}$.

f) Después de analizar la continuidad en $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y en $x = 6$, se concluye que f es continua en $\langle -\infty; +\infty \rangle$.

g) $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+4}{3x^{1/3}(x+2)^{2/3}} - 1, & x < 0 \\ \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{12(x^2 - 8)}{(x^2 + 6x + 8)^2}, & 2 < x < 4 \\ \dfrac{x(26 - x^2)}{(x^2 - 36)^{3/4}(16 - x^2)^{3/4}}, & 4 < x < 6 \\ \dfrac{x - 8}{(x-6)^{2/3}(x-12)^{1/3}}, & x > 6 \end{cases}$$

Puntos críticos: $x = -2$, $x = -16/9$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = \sqrt{8}$,
$x = 4$, $x = \sqrt{26}$, $x = 6$, $x = 8$ y $x = 12$

El análisis de los signos de la derivada se muestra en la siguiente tabla.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -2 \rangle$	+	creciente	
$\langle -2; -16/9 \rangle$	+	creciente	$f(-16/9) = 2{,}68$ máx.
$\langle -16/9; 0 \rangle$	−	decreciente	$f(0) = 0$ mín.
$\langle 0; 1 \rangle$	+	creciente	$f(1) = 1$ máx.
$\langle 1; 2 \rangle$	−	decreciente	
$\langle 2; \sqrt{8} \rangle$	−	decreciente	$f(\sqrt{8}) = -0{,}03$ mín.
$\langle \sqrt{8}; 4 \rangle$	+	creciente	
$\langle 4; \sqrt{26} \rangle$	+	creciente	$f(\sqrt{26}) = 3{,}16$ máx.
$\langle \sqrt{26}; 6 \rangle$	−	decreciente	$f(6) = 0$ mín
$\langle 6; 8 \rangle$	+	creciente	$f(8) = 3{,}17$ máx.
$\langle 8; 12 \rangle$	−	decreciente	$f(12) = 0$ mín.
$\langle 12; +\infty \rangle$	+	creciente	

h) $y = 2/3$ es una asíntota horizontal hacia la izquierda porque

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$, donde $f(x) = x^{2/3}(x+2)^{1/3} - x$.

www.FreeLibros.com

$y = x - 10$ es una asíntota oblicua hacia la derecha, porque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 = m \ \wedge \ b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = -10,$$

donde $f(x) = (x-6)^{1/3}(x-12)^{2/3}$.

No tiene asíntotas verticales.

i) La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 7.14.

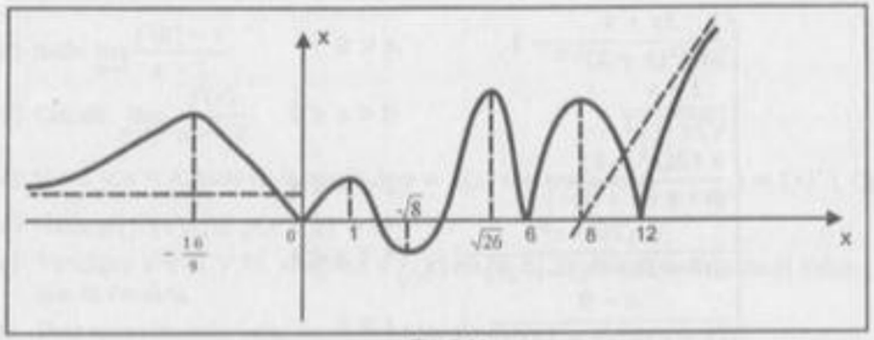


Fig. 7.14

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine los intervalos de crecimiento, los valores extremos relativos y bosqueje la gráfica de las funciones dadas.

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ R. máx en $x = -2$, mín en $x = 2/3$

2) $g(x) = x^4 - 14x^2 - 24x + 1$ R. máx en $x = -1$, mín en $x = -2$ y en $x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ R. máx en $x = 1$, mín en $x = -1$

4) $f(x) = |x^2 - 9|$ R. máx en $x = 0$, mín en $x = 3$ y en $x = -3$

5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ R. máx en $x = 0$, mín en $x = -2$

6) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4x}$ R. máx en $x = 1$, mín en $x = -2$

7) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ R. máx en $x = 2$, mín en $x = 0$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5}$ R. máx en $x = 11 - \sqrt{72}$, mín en $x = 11 + \sqrt{72}$

9) $f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$

10) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ R. máx en $x = 0$, mín en $x = 2/5$

11) $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ R. máx en $x = 2$, mín en $x = -2$

12) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$ R. máx en $x = -1$, mín en $x = 1$

13) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-23}{x-4}$ R. máx en $x = 3$, mín en $x = 5$

14) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ R. máx en $x = 1$, mín en $x = -1$

15) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ R. máx en $x = -1$, mín en $x = 1$

16) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ R. máx en $x = 1/2$

En los ejercicios del 17 al 20, encuentre los valores máximos y mínimos de las funciones dadas.

17) $f(x) = (a_1 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$

18) $f(x) = (a - x)^3 + (b - x)^3$, con $a \neq b$

19) $f(x) = (a_1 - 2x^2)^2 + \ldots + (a_n - 2x^2)^2$

20) $f(x) = (a_1 - x)^r + \ldots + (a_n - x)^r$, r entero positivo impar.

21) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases}$ R. 1 máx local y 0 mín local

Para cada una de las siguientes funciones, halle los valores máximo y mínimo absolutos en los intervalos que se indican.

22) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ R. máx $= \frac{43}{16}$, mín $= 0$

23) $f(x) = \dfrac{1}{x^5+x+1}$ en $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ R. máx $= \frac{32}{15}$, mín $= \frac{1}{3}$

24) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ R. máx $= \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, mín $= 0$

25) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0; 5]$ R. no existe ni máx ni mín absoluto

www.FreeLibros.com

En los ejercicios del 26 al 31, determine las asíntotas, los intervalos de crecimiento, los valores extremos relativos y construya la gráfica de la función.

26) $f(x)=\begin{cases}(x+5)^{1/3}(x+2)^{2/3}, & x\le -2\\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x\le 2\\ (x-2)^{1/3}(x-6)^{2/3}, & x>2\end{cases}$

R. Asíntotas: $y=x+3$, $3y=3x-14$

V. máx. en $x=-4;0;10/3$ y V. mín. en $x=-2;\ 2;\ 6$.

27) $f(x)=\begin{cases}x(x+2)^{2/3}, & x<0\\ x^{2/5}(x-2)^{1/3}, & 0\le x\le 2\\ (x-2)^{2/3}(x-4)^{1/3}, & x>2\end{cases}$

R. Asíntota: $8y=3x-8$

V. máx. en $x=-2;0;2$ y V. mín. en $x=-6/5;\ 4/3;\ 10/3$.

28) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+9x+8}{x^2-9x+8}, & x\le -1\\ (x+1)^{1/3}(x-1)^{2/3}, & -1<x<1\\ \sqrt[3]{4x-x^2-3}, & 1\le x\le 3\\ (x-3)^{1/3}(x-8)^{2/3}, & x>3\end{cases}$

R. Asíntotas: $y=1$, $3y=3x-19$

V. máx. en $x=-1/3;\ 2;14/3$ y V. mín. en $x=-2\sqrt{2};1;\ 3;\ 8$.

29) $f(x)=\begin{cases}(x+2)^{1/5}(x-2)^{3/5}, & x\le -2\\ \sqrt[3]{x^3-4x}, & -2<x\le 2\\ |x^2-8x+12|, & 2<x\le 6\\ \dfrac{\sqrt{x^2-36}-\sqrt{12x-72}}{\sqrt{x^2-36}+\sqrt{12x-72}}, & x>6\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{x^3-8}, & x\le -2\\ \dfrac{3(x^2-4)}{2(x^2+4)}, & -2<x\le 2\\ \dfrac{\sqrt{8x-x^2-12}}{\sqrt[3]{x^2-8x+12}}, & 2<x<6\\ |x-6|^{1/3}|x+6|^{2/3}, & x\ge 6\end{cases}$

R. Asíntotas: $y=1$, $y=x+2$

V. máx. en $x=2$ y V. mín. en $x=0;\ 4$.

31) $f(x)=\begin{cases}\left(x+\left[\!\left[\dfrac{6x-11}{x-2}\right]\!\right]\right)^{2/3}\left(x+\left[\!\left[\dfrac{7-2x}{3-x}\right]\!\right]\right)^{1/3}, & x\le -2\\ |x|^{1/3}|x+2|^{1/3}|x-2|^{1/3}, & -2<x\le 2\\ \dfrac{8x-x^2-12}{\sqrt[3]{x^2-8x+12}}, & 2<x<6\\ (x-6)^{2/5}(x-1)^{3/5}, & x\ge 6\end{cases}$

R. Asíntotas: $y=x+4$, $x=-3$

V. máx. $x=-5;-\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y V. mín. en $x=-3;0;4$.

32) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^{2/3}(x+3)^{1/3}, & x\le 0\\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x\le 2\\ \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}, & 2<x\le 4\\ (x-4)^{2/3}(x+5)^{1/3}, & x>4\end{cases}$

a) Si $2<x<4$, halle la derivada de $y=f(x)$ con respecto a $\dfrac{x+4}{x-4}$.

b) Halle $g'(f'(-2))$ si $g(x+3)=x^3-3x^2+8$.

c) Halle los extremos relativos y esboce la gráfica de f.

33) Determine los valores de a, b y c si

a) $f(x)=2x^3+ax^2+b$ presenta un extremo relativo en $(-1;2)$.

R. $a=-3$, $b=1$

b) $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un valor máximo relativo en $(1;7)$ y la gráfica de f pasa por $(2;-2)$. R. $a=-9$, $b=18$, $c=-2$

34) Para una constante $a>0$, encuentre la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo relativo de la función $f(x)=\left(a-\dfrac{1}{a}-x\right)(4-3x^2)$.

R. $\dfrac{4}{9}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3$

35) Sean f y g funciones derivables en $\langle a;b\rangle$ con $f'(x)>g'(x)$, $\forall x\in\langle a;b\rangle$. Si existe $c\in\langle a;b\rangle$ tal que $f(c)=g(c)$, pruebe que $f(x)<g(x)$, $\forall x\in\langle a;c\rangle$, y $g(x)<f(x)$, $\forall x\in\langle c;b\rangle$.

36) Sea f derivable en $\mathbb{R}$ y $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0$. Si c es un punto de máximo local de g, pruebe que:

a) $cf'(c)-f(c)=0$

b) La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c;f(c))$ pasa por el origen.

www.FreeLibros.com

7.3 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La solución de problemas prácticos que implican en su enunciado la optimización de sus resultados requieren:

a) Expresar el enunciado, en lo posible, como una función de una variable (si es necesario se representa geométricamente).

b) Identificar el tipo de extremo a calcular, y luego aplicar el criterio de la primera o de la segunda derivada para verificar el extremo que se pide.

Los siguientes ejemplos muestran un método en la solución de estos problemas.

Ejemplo 14. Halle dos números positivos tal que su suma sea igual a 60 y su producto sea el mayor posible.

Solución

Suponiendo que uno de los números es x y el otro es $y = 60 - x$. Se desea que $P(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$ sea máximo.

$P'(x) = 60 - 2x \Rightarrow x = 30$ es punto crítico y $P''(30) = -2$.

Por el criterio de la segunda derivada, en $x = 30$ la función P tiene valor máximo. Por consiguiente, los números buscados son: $x = 30$ e $y = 30$.

Ejemplo 15. De una hoja cuadrada de lado a, se desea construir una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determine el lado de los cuadrados que deben ser cortados de modo que el volumen de la caja sea el mayor posible.

Solución

Siendo x el lado de los cuadrados cortados, el volumen de la caja es

$$V(x) = x(a - 2x)^2, \text{ donde } 0 < x < a/2$$

Luego de maximizar esta función, se obtiene que en $x = a/6$ existe valor máximo para V, es decir, se debe cortar cuadrados de lado $a/6$.

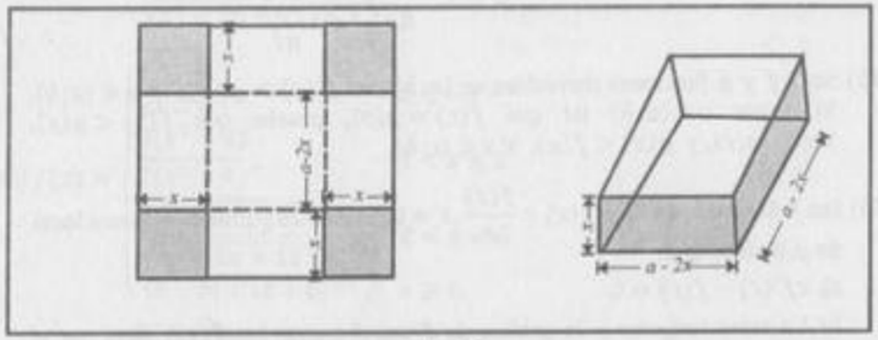


Fig. 7.15

Ejemplo 16 Se desea construir una lata cilíndrica (con tapa) de manera que se gaste lo menos posible ¿Cuál es la relación entre la altura y el radio de la base para que esto ocurra?

Solución

El problema, desde el punto de vista matemático, se presenta bajo dos aspectos:

a) De todas las latas que poseen igual área total (A constante), tendrá menor gasto el que tenga mayor volumen (V máximo).

b) De todas las latas que poseen el mismo volumen (V constante), tendrá menor gasto el que tiene área mínima. (A mínimo).

Vamos a resolver utilizando (a). Se deja al lector la solución según (b).

El área del material es $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ y el volumen es $V = \pi r^2 h$.

Como A es constante, $h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}$. Sustituyendo este valor en V se obtiene

$$V(r) = \frac{Ar}{2} - \pi r^3, \; r > 0$$

Al optimizar esta función, encontramos que en $r = \sqrt{A/6\pi}$ existe máximo para V y la relación que existe entre el radio (r) y la altura (h) es: $h = 2r$.

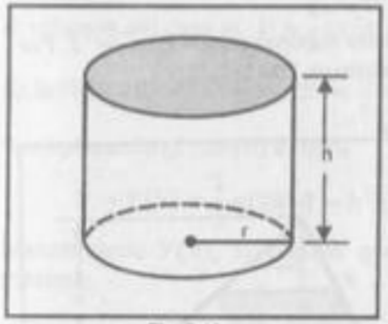


Fig. 7.16

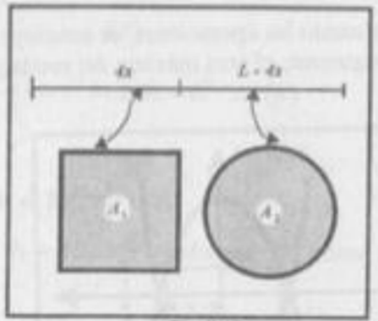


Fig. 7.17

Ejemplo 17. Un alambre de longitud L es cortado en dos partes de manera que con una parte se forme un cuadrado y con la otra, una circunferencia ¿De qué modo debe ser cortado para que la suma de las áreas sea máxima?

Solución

Sea $A = A_1 + A_2$ (Fig. 7.17). Si x es la longitud del lado del cuadrado y r el radio del círculo, entonces $A_1 = x^2$ y $A_2 = \pi r^2$.

Considerando que $L - 4x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L - 4x}{2\pi}$, entonces

$$A(x) = A_1 + A_2 = x^2 + \pi\left(\frac{L - 4x}{2\pi}\right)^2 = x^2 + \frac{(L - 4x)^2}{4\pi}, \; 0 \le x \le L$$

www.FreeLibros.com

Puesto que $A'(x) = 2x - \dfrac{2(L-4x)}{\pi} \Rightarrow x = \dfrac{L}{\pi + 4}$ es punto crítico.

El problema planteado es encerrar la mayor área posible (máximo absoluto). Como $x \in [0; L]$, los puntos de análisis son $x = 0$, $x = L$ y $x = L/(\pi + 4)$.

Evaluando la función A en estos 3 puntos, se concluye que el valor máximo absoluto ocurre cuando $x = 0$. Por lo tanto, se encierra la mayor área posible cuando no se corta el alambre y se usa todo para construir el círculo (en el punto crítico $x = L/(\pi + 4)$, la función presenta valor mínimo relativo).

Ejemplo 18. Halle el área del rectángulo más grande (con lados paralelos a los ejes coordenados) que puede inscribirse en la región limitada por las parábolas $3y = 12 - x^2$, $6y = x^2 - 12$.

Solución

Sea ABCD el rectángulo inscrito (Fig. 7.18) de base $2x$ y altura z. Si el área del rectángulo es A, entonces $A = 2xz$, donde

$$z = \frac{1}{3}(12 - x^2) - \frac{1}{6}(x^2 - 12) = \frac{12 - x^2}{2}$$

Entonces, $A = A(x) = 12x - x^3$, $0 < x < \sqrt{12}$

Efectuando las operaciones, se concluye que existe máximo para A en $x = 2$. Por consiguiente, el área máxima del rectángulo inscrito es $16u^2$.

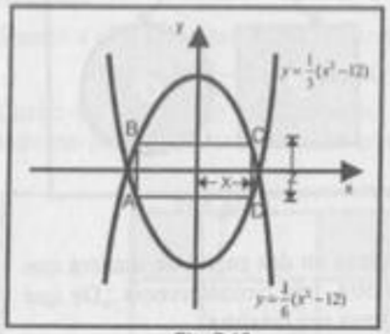


Fig. 7.18

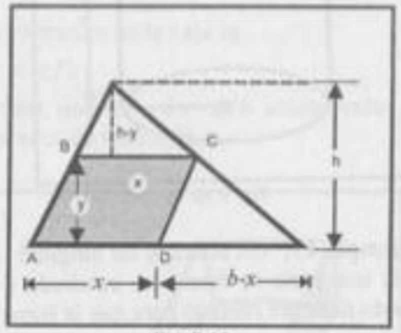


Fig. 7.19

Ejemplo 19

Si un paralelogramo y un triángulo tienen un vértice común y los otros vértices del paralelogramo están sobre los lados del triángulo dado, pruebe que el área del mayor paralelogramo que se puede inscribir del modo descrito es igual a la mitad del área del triángulo (se conoce la base y la altura del triángulo).

www.FreeLibros.com

Solución

Sea ABCD el paralelogramo con las características del problema, inscrito en el triángulo AEF de altura h y base b (Fig. 7.19).

Si x e y son las longitudes de la base y de la altura del paralelogramo respectivamente, su área está dada por $A = xy$ ... (1)

De la figura, $\Delta AEF \sim \Delta BEC$.

Luego, $\dfrac{h-y}{x} = \dfrac{h}{b}$, de donde $x = \dfrac{b(h-y)}{h}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1), se tiene: $A = A(y) = \dfrac{b(hy - y^2)}{h}$, $0 < y < h$.

Maximizando esta función, se deduce que $y = h/2$ es un punto de valor máximo para A. Reemplazando este valor en (2), se obtiene $x = b/2$.

Luego, $A = \dfrac{bh}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{bh}{2} = \dfrac{1}{2}$(área del triángulo)

Ejemplo 20. Encuentre la altura del cono recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio R.

Solución

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ... (α)

En la Fig. 7.20, $\Delta CAB \sim \Delta BAD \Rightarrow \dfrac{h}{r} = \dfrac{r}{2R - h} \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2$ ... (β)

Reemplazando (β) en (α) se tiene

$$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi(2h^2R - h^3), \quad 0 < h < 2R$$

Maximizando $V(h)$, se obtiene que para $h = 4R/3$ el volumen del cono es máximo.

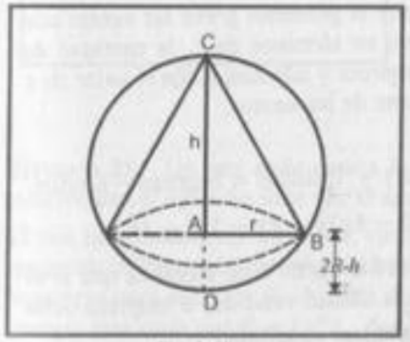


Fig. 7.20

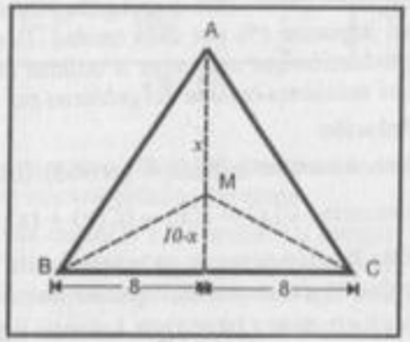


Fig. 7.21

Ejemplo 21. Una compañía de aviación transporta 8000 pasajeros por día, con una tarifa de 800 dólares por persona. Al considerar un aumento en la tarifa, la compañía determina que perderá 400 pasajeros por cada 50 dólares de aumento. Bajo estas condiciones, ¿cuál debe ser el aumento para que el ingreso de la compañía sea máximo?

Solución

Si x es el número de incrementos de 50 dólares en la tarifa, entonces $800 + 50x$ es la tarifa resultante y el número de pasajeros será $8000 - 400x$.

El ingreso es

$I(x) = (800 + 50x)(8000 - 400x) = 20000\,(320 + 4x - x^2),\ \ 0 \le x < 20.$

Esta función ingreso presenta un máximo absoluto para $x = 2$. Luego, el aumento que maximiza el ingreso es de 100 dólares, es decir, el valor del pasaje será 900 dólares.

Ejemplo 22. Tres fábricas están situadas en los vértices de un triángulo isósceles. Las fábricas B y C, que distan entre sí 16 millas, están situadas en la base; la fábrica A, en el tercer vértice y a una distancia de 10 millas de la base ¿A qué distancia de A, a lo largo de la altura, se debe colocar una instalación de bombeo de agua, de manera que se emplee la menor longitud de cañerías para abastecer a las tres fábricas?

Solución

Por la figura 7.21, se desea que $L = \overline{AM} + \overline{BM} + \overline{MC}$ sea mínima.

$$L(x) = x + 2\sqrt{64 + (10 - x)^2}\,,\ \ 0 \le x \le 10$$

Esta función presenta mínimo cuando $x = 10 - 8\sqrt{3}/3$. Por tanto, el sistema de bombeo de agua debe ubicarse a $(10 - 8\sqrt{3}/3)$ millas de A.

Ejemplo 23. Supongamos que las funciones del precio y costo de una producción están dadas por $p(x) = 20 - 4x$ y $C(x) = 2x - 10^6$, donde x es el número de unidades producidas. Supongamos también que el gobierno grava las ventas con un impuesto $t\%$ por cada unidad. Determine, en términos de t, la cantidad de producción que maximiza la utilidad de la empresa y además, halle el valor de t que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuestos.

Solución

Se conoce que: Ingreso = (precio).(cantidad) y Utilidad = Ingreso – Gastos.

Entonces, $U(x) = I(x) - (C(x) + tx) = (20 - 4x)x - 2x - 10^6 - tx$.

Esta función presenta un máximo para $x = (18 - t)/8$. Esto significa que si el gobierno grava con un impuesto de t % a cada unidad vendida, la empresa debe producir $x = (18 - t)/8$ unidades para maximizar su utilidad.

Por otro lado, la renta del gobierno está dada por

$$R(t) = tx = \frac{t(18 - t)}{8} = \frac{18t - t^2}{8}$$

Maximizando R, se obtiene que para $t = 9$, $R(t)$ es máximo. Por tanto, el gobierno maximiza la renta gravando con un impuesto de 9% a cada unidad.

Ejemplo 24 Un fabricante desea construir cajas cerradas de $256\ \text{cm}^3$ de capacidad. La base debe ser un rectángulo cuyo largo es el doble del ancho. Si se sabe que el precio del material para la base y la tapa es de S/. 3 por cm^2, y para los lados es de S/. 2 por cm^2; halle las dimensiones de la caja que minimizan su costo y el costo mínimo.

Solución

El costo de cada caja es $C(x) = 3(4x^2) + 2(4xh) + 2(2xh)$ ... (1)

Como $2x^2h = 256 \Rightarrow h = \dfrac{128}{x^2}$ ... (2)

Al reemplazar (2) en (1), se obtiene: $C(x) = 12\left(x^2 + \dfrac{128}{x}\right)$, $x > 0$

Esta función presenta mínimo para $x = 4$. Por consiguiente, las dimensiones de la caja de menor costo son: ancho = 4 cm, largo = 8 cm y alto = 8 cm. El costo mínimo de la caja es de S/. 576.

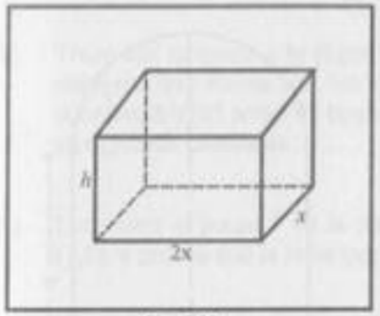


Fig. 7.22

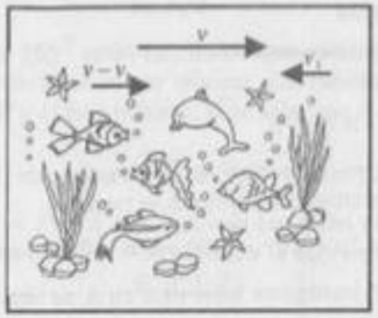


Fig. 7.23

Ejemplo 25. Un pez nada contra la corriente a una velocidad constante v en relación con el agua. Se sabe que el agua tiene una velocidad v_1 río abajo.

El pez intenta alcanzar un punto, situado a una distancia s río arriba. La energía requerida es esencialmente determinada por el roce con el agua y por el tiempo t necesario para alcanzar el objetivo. Experiencias pasadas han mostrado que esta energía está dada por $E = cv^kt$, donde $c > 0$ y $k > 2$ son ciertas constantes (k depende de la forma del pez). Dado v_1, ¿qué velocidad minimiza la energía?

www.FreeLibros.com

Solución

Se observa (Fig. 7.23) que la velocidad del pez río arriba es $v - v_1$.

Por otro lado, esta velocidad también es igual a $\frac{s}{t}$, esto es, $v - v_1 = \frac{s}{t}$.

De lo anterior, se deduce que

$$t = \frac{s}{v - v_1}$$

Reemplazando este valor en E, se tiene

$$E(v) = \frac{csv^k}{v - v_1}, \quad v > v_1 \ (k, s, c, v_1 \text{ son constantes})$$

Después de realizar el proceso de optimización, se demuestra que la energía es mínima cuando $v = \frac{k}{k-1} v_1$. Esto significa que la velocidad que permite ahorrar energía a un pez que nada contra la corriente depende solamente de la velocidad v_1 del agua y de un parámetro k relacionado con la forma del pez.

Ejemplo 26. Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consta de un rectángulo que tiene pegado en cada uno de sus lados menores un semicírculo. Con el fin de realizar varias actividades al mismo tiempo, se pretende que el área de la parte rectangular sea la mayor posible. Halle las dimensiones del campo para tal fin.

Solución

Se quiere maximizar el área (A) del rectángulo

$$A = 2rx.$$

Si P es el perímetro del campo, de las condiciones del problema se tiene

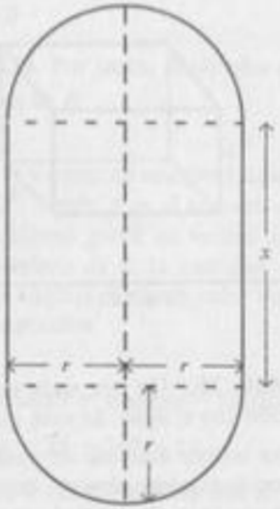
$$P = 2x + 2\pi r = 400 \Rightarrow x = 200 - \pi r$$

Sustituyendo este valor de x en A, se obtiene

$$A = 2r(200 - \pi r) = 400r - 2\pi r^2$$

Esta función presenta máximo cuando $r = 100/\pi$. Por tanto, las dimensiones del campo que maximizan el área de la parte rectangular son:

$$x = 100 \text{ m} \ \text{ y } \ r = \frac{100}{\pi} \text{ m}.$$



EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P(3;4)$ y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
R. $4x + 3y - 24 = 0$

2) Se quiere construir un jardín que tenga la forma de un sector circular, con un perímetro de 30 m. Halle el jardín de mayor superficie.
R. $56{,}25 \text{ m}^2$

3) Encuentre los puntos de la curva $y^2 = x + 1$ que están más cerca del origen.
R. $(-1/2; \pm\sqrt{2}/2)$

4) Un rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el eje x y los otros dos están, respectivamente, sobre las rectas $y = x$, $4y + 5x = 20$. Halle el valor de y para que el área del rectángulo sea máximo.
R. $10/9$

5) Un cilindro circular recto es inscrito en un cono circular recto de radio r. Halle el radio R del cilindro, si su volumen es máximo.
R. $R = 2r/3$

6) Demuestre que el rectángulo de área máxima inscrito en un círculo es un cuadrado.

7) Un punto móvil P describe la curva $y = 4/x$, $x > 0$. Determine la distancia mínima de P al origen.
R. $2\sqrt{2}$

8) Trace una tangente a la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ de modo que el área del triángulo que forma con los ejes coordenados sea mínima. Determine las coordenadas del punto de tangencia P y el área mínima, si se sabe que P está en el primer cuadrante.
R. $P(2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}/2)$ y $A = 12 \text{ u}^2$

9) Determine el punto P de la curva $y = x^2 + x$ que está más cerca del punto $(7;0)$, y pruebe que la recta que pasa por $(7;0)$ y P es normal a la curva en P.
R. $P(1;2)$

10) Una hoja de papel tiene S cm^2 de material impreso, con márgenes superior e inferior de 4 cm y márgenes laterales de 2 cm. Determine cuáles deben ser las dimensiones de la hoja para que se use la menor cantidad de papel.
R. $4 + \sqrt{2S}/2$ (base) y $8 + \sqrt{2S}$ (altura)

11) Se tiene una hoja rectangular de cartón, de lados 8 cm y 15 cm. Se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determine el lado de los cuadrados que deben ser cortados a fin de que el volumen sea el mayor posible.
R. 5/3 cm

www.FreeLibros.com

12) Si la suma de las áreas de un cubo y de una esfera es constante, ¿cuál es la relación entre el radio de la esfera (r) y el lado del cubo (a) cuando la suma de sus volúmenes es mínima?

R. $a = 2r$

13) Demuestre que el volumen del cilindro recto más grande que puede ser inscrito en un cono es 4/9 del volumen del cono.

14) Un cono recto es cortado por un plano paralelo a su base ¿A qué distancia de la base debe ser hecho el corte para que un cono recto de base en la sección determinada y de vértice en el centro de la base del cono dado tenga volumen máximo?

R. 1/3 de la altura del cono.

15) Si los lados de un rectángulo son a y b, demuestre que el rectángulo más grande que puede construirse de manera que sus lados pasen por los vértices del rectángulo dado es un cuadrado de lado $(a + b)/2$.

16) Demuestre que el triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia es un triángulo equilátero.

17) Una ventana, cuya forma es un semicírculo sobrepuesto a un rectángulo, tiene un perímetro dado. Hallar la altura y el ancho de la ventana, de manera que pueda admitir la mayor cantidad de luz.

R. El radio del semicírculo debe ser igual a la altura del rectángulo

18) Determine la superficie lateral del cilindro circular recto que puede ser inscrito en un cono circular recto dado.

R. $A = \pi rh/2$

19) Determine las dimensiones del cilindro recto de mayor superficie lateral que puede inscribirse en una esfera dada.

R. altura $= \sqrt{2}r$

20) Halle las dimensiones de un triángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de radio r.

R. triángulo equilátero de lado $= \sqrt{3}r$

21) Determine el cono circular recto de mayor superficie total que puede inscribirse en una esfera de radio r.

R. altura $= (23 - \sqrt{17})r/16$

22) Un agente de bienes estima que el beneficio mensual P en soles que obtiene al alquilar un edificio de s pisos, está dado por $P = -2s^2 + 92s$ ¿Qué número de pisos hará más rentable el edificio?

R. 23 pisos

23) Una radioemisora ha hecho una investigación sobre las costumbres de audición de los residentes locales en las horas comprendidas entre las 5 p.m. y la medianoche. La investigación estima que x horas después de las 5 p.m. de una noche típica de la semana, $-\frac{1}{4}x^3 + \frac{27}{8}x^2 - \frac{27}{2}x + 30$ por ciento de la población adulta local está sintonizando la estación.

a) ¿En qué momento, entre las 5 p.m. y la medianoche, está escuchando la estación la mayor cantidad de gente?

b) ¿En qué momento, entre las 5 p.m. y la medianoche, está escuchando la estación la menor cantidad de gente?

R. a) 5 p.m. b) 8 p.m.

24) Un comerciante estima que el costo de producción de x unidades de mercancía es $C(x) = 25x + 20000$. Además, se sabe que $x + p = 5000$ es la ecuación de demanda, donde x representa la cantidad de unidades demandadas al precio de p soles la unidad.

a) Calcule la utilidad máxima.

b) Si el gobierno exige al comerciante un impuesto de 10 soles por cada unidad producida, ¿cuál es la nueva utilidad máxima?

25) El costo inicial de una máquina es C y el costo de operación por x años es $ax + \frac{bx(x-1)}{2}$. Obtenga el costo medio por año y calcule el valor de x que minimiza el costo medio.

26) El costo de fabricación de x unidades es $ax^2 + bx + c$ y el precio de venta de cada unidad es $p = \alpha - \beta x^2$. Determine el valor de x que anula la utilidad marginal y pruebe que este valor maximiza la utilidad.

27) Un fabricante de conservas usa latas cilíndricas, cuyos volúmenes deben ser iguales a 500 cm^3 ¿Cuáles deben ser las dimensiones más económicas de las latas? (Sugerencia: minimizar el área de la superficie)

28) La producción de bicicletas de una empresa es de x unidades por mes, al costo total de $100 + 3x + \frac{x^2}{25}$. Si la demanda es de $x = 75 - 3p$, donde p es el precio por unidad, calcule el número de unidades óptimo, es decir, el valor de x que maximiza la utilidad.

29) Sea v la velocidad de un pájaro relativo al aire, W su peso y ρ la densidad del aire. Penny Cuik (1969) encontró la siguiente fórmula para la potencia P que el pájaro debe mantener durante el vuelo:

$$P = \frac{w^2}{2\rho Sv} + \frac{\rho A v^3}{2}$$

www.FreeLibros.com

donde S y A son ciertas constantes relacionadas con la forma y el tamaño del pájaro. Halle la velocidad v que minimiza la potencia P.

R. $\sqrt[4]{w^2/3\rho^2 SA}$

30) La energía producida por algunos pájaros puede ser medida. Para el periquito australiano (*Melopsittacus Undulatus*), la energía producida en $cal/gr \times km$ (caloría por gramo por kilómetro) puede ser descrita por la fórmula

$$E = \frac{1}{v}(0{,}074(v-35)^2 + 22)$$

donde v es la velocidad del pájaro en km/h (la velocidad del viento se desprecia) ¿Qué velocidad le permite ahorrar más energía?

31) En ciertos tejidos, las células tienen la forma de un cilindro circular recto de altura h y radio r. Si el volumen V es fijo, encuentre el radio particular que minimiza la superficie total del área. ¿Cuál es la relación entre h y r?

R. $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$, $h = 2r$

32) Se dispone de un trozo de madera que tiene la forma de un tronco de cono circular recto de 10 cm de altura, y se desea cortar un sólido cilíndrico de mayor volumen. Determine las dimensiones de dicho sólido, si las bases del tronco tienen como diámetros 4 y 9, respectivamente.

R. $r = 2$

33) Tres puntos A, B y C están situados de modo que $\measuredangle ABC = 60°$. Un automóvil sale de A y, en el mismo momento, de B parte un tren. El automóvil se dirige hacia B a 80 km/h y el tren se dirige a C a 50 km/h. Considerando que $\overline{AB} = 20$ km, ¿en qué momento será mínima la diferencia entre el automóvil y el tren?

R. 1 hora y 38'

34) Un torpedero está anclado a 9 km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar un mensajero al campamento situado también en la orilla, y se sabe que la distancia entre el campamento y el punto referido es de 15 km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km/h y en un bote, remando, 4 km/h, ¿en qué punto de la orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible?

R. a 3 km del campamento

35) Sean $A(1;4)$ y $B(3;0)$ dos puntos de la elipse $2x^2 + y^2 = 18$. Halle el tercer punto C de modo que el área del triángulo ABC sea el mayor posible.

R. $C(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$

36) Se desea construir un embudo cónico cuya generatriz debe ser igual a 20 cm ¿Cuál será la altura del embudo cuyo volumen sea el mayor posible?

R. $20\sqrt{3}/3$ cm

37) Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1;4)$, de modo que la suma de sus coordenadas (positivas) en el origen sea la menor posible.

R. $2x + y = 6$

38) En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?

R. 5 cm

39) En una carretera a través del desierto, un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto su velocidad es de 60 km/h. Si se sabe que las distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km, determine la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

40) Un hato de 104 venados se transporta a una isla pequeña. El rebaño crece inicialmente de forma rápida, pero entonces los recursos alimenticios de la isla comienzan a escasear y la población disminuye. Se sabe que el número $N(t)$ de venados que hay a los t años está dado por $N(t) = -t^4 + 22t^2 + 104$.

a) ¿Cuándo deja de crecer el hato?

b) ¿Cuál es el tamaño máximo?

c) ¿Cuándo se extingue la población?

d) ¿Cuándo crece más rápidamente la población?

e) Trace la gráfica de $N(t)$ para $t \geq 0$.

41) Se quiere hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un determinado material, pero para la base se debe emplear un material un 50% más caro. Halle las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

R. El envase tiene la base cuadrada de 4 cm de lado y 5 cm de altura.

www.FreeLibros.com

7.4 CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto c interior de su dominio D. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(c; f(c))$ es

$$T(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Para $x \in D$, consideremos la función

$$u(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(c) - f'(x)(x - a)$$

Definición 2 (Concavidad hacia arriba o convexidad). Se dice que f es **cóncava hacia arriba** en el punto c, si existe una vecindad $B(c;\delta) \subset D$ tal que

$$u(x) > 0,\ \forall x \in B(c;\delta)\ \text{y}\ x \neq c\ \text{(Fig. 7.24)}.$$

Definición 3 (Concavidad hacia abajo o cóncava). Se dice que f es **cóncava hacia abajo** en el punto c, si existe una vecindad $B(c;\delta) \subset D$ tal que

$$u(x) < 0,\ \forall x \in B(c;\delta)\ \text{y}\ x \neq c\ \text{(Fig. 7.25)}.$$

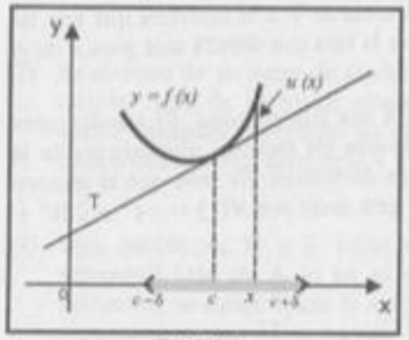


Fig. 7.24

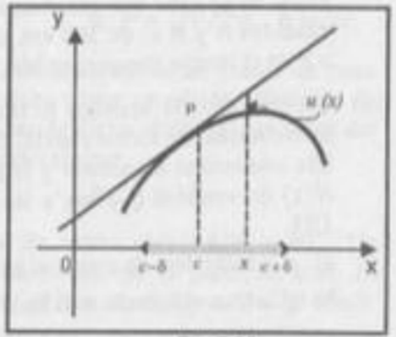


Fig. 7.25

Observación 4

Teniendo en cuenta que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(c; f(c))$ divide al plano en dos semiplanos (uno superior y otro inferior), decir que la curva es cóncava hacia arriba en el punto c significa que su gráfica en la vecindad $B(c;\delta)$ se encuentra en el semiplano superior ó que la recta tangente se encuentra por debajo de la curva.

Análogamente, decir que f es cóncava hacia abajo en el punto c significa que la gráfica de f en la vecindad $B(c;\delta)$ se encuentra en el semiplano inferior ó que la recta tangente se encuentra por encima de la curva.

Definición 4 (Concavidad en un intervalo) Se dice que f es cóncava hacia arriba (o hacia abajo) en el intervalo $\langle a; b\rangle$ cuando es cóncava hacia arriba (o hacia abajo) en todo punto de $\langle a; b\rangle$. Si una curva es cóncava hacia arriba se denotará con $\cup$, y si la curva es cóncava hacia abajo se denotará con $\cap$.

Definición 5 (Punto de inflexión). Sea f una función continua en el punto c. Se dice que $P(c; f(c))$ es un **punto de inflexión** de f, si existe un $\delta > 0$ tal que las concavidades en los intervalos $\langle c - \delta; c\rangle$ y $\langle c; c + \delta\rangle$ son diferentes. En otras palabras, el punto de inflexión de una curva continua es el punto que separa la parte convexa de la cóncava (Fig. 7.26).

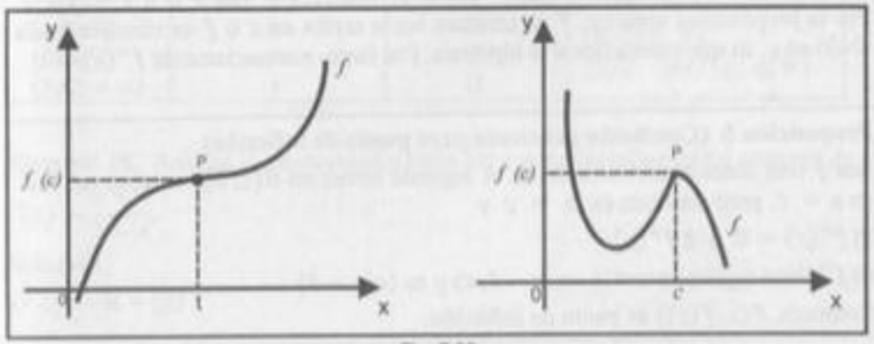


Fig. 7.26

Proposición 4

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en una vecindad $B(c;\delta) \subset D$ y $f''(c) \neq 0$.

I) Si $f''(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en el punto c.

II) Si $f''(c) < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en el punto c.

Demostración

I) Como $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$, existe δ_1 con $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0,\ \forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c \quad \ldots \ (11)$$

Se probará que $u(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) > 0, \forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c$.

Aplicando el T.V.M. a la diferencia $f(x) - f(c)$, se obtiene

$$u(x) = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)\text{, con } d \text{ entre } c \text{ y } x$$
$$= [f'(d) - f'(c)](x - c)$$

Como (11) es verdadero para todo $x \in B(c;\delta_1)$ con $x \neq c$, se tiene

Si $x < c \Rightarrow x - c < 0 \wedge f'(x) - f'(c) < 0 \Rightarrow f'(d) - f'(c) < 0$ (pues d está entre c y x). Luego, $u(x) > 0,\ \forall x \in \langle c - \delta_1; c\rangle$ ... (12)

Análogamente, se prueba que $u(x) > 0,\ \forall x \in \langle c; c + \delta_1\rangle$ ... (13)

De (12) y (13) se sigue que $u(x) > 0,\ \forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c$. Esto demuestra que f es cóncava hacia arriba en el punto c.

II) La demostración es análoga a la anterior.

www.FreeLibros.com

Corolario

Sea f una función derivable hasta el segundo orden en $B(c;\delta) \subset D$ y $P(c;f(c))$ un punto de inflexión de f, entonces $f''(c) = 0$.

Demostración

Por el absurdo, supongamos que $f''(c) \neq 0$, entonces $f''(c) > 0$ ó $f''(c) < 0$. Por la proposición anterior, f es cóncava hacia arriba en c ó f es cóncava hacia abajo en c, lo que contradice a la hipótesis. Por tanto, necesariamente $f''(c) = 0$.

Proposición 5 (Condición suficiente para punto de inflexión)

Sea f una función derivable hasta el segundo orden en $B(c;\delta)$, excepto tal vez en $x = c$, pero continua en $x = c$ y

a) $f''(c) = 0$ ó $\nexists\, f''(c)$

b) f'' tiene signos opuestos en $\langle c-\delta; c\rangle$ y en $\langle c; c+\delta\rangle$

Entonces, $P(c;f(c))$ es punto de inflexión.

Demostración. Inmediata.

Corolario

Sea f derivable hasta el orden 2 en $B(c;\delta)$ tal que $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces $P(c;f(c))$ es punto de inflexión de f.

Demostración. Ejercicio para el lector.

Observación 5 (Criterio para determinar los puntos de inflexión)

Las proposiciones 4 y 5 nos permiten establecer el siguiente criterio para hallar los puntos de inflexión de una función continua f.

1) *Hallar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no existe. A estos valores los llamaremos* ***puntos críticos de inflexión*** *(PCI).*

2) *Determinar el signo de $f''(x)$ para valores menores y para valores mayores (lo suficientemente próximos) a cada punto crítico de inflexión.*

   Si hay cambio de signo de $f''(x)$, existe punto de inflexión en el PCI.

   Si no hay cambio de signo de $f''(x)$, no existe punto de inflexión en el PCI.

Ejemplo 27. Si $f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 1$, determine sus intervalos de concavidad y sus puntos de inflexión.

Solución

a) f es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 1$

c) $f''(x) = 12x^2 - 18x = 6x(2x-3)$

Puntos críticos de inflexión: $x = 0$ y $x = 3/2$ (de $f''(x) = 0$).

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; 0\rangle$	+	∪	$(0;1)$ es P.I.
$\langle 0; 3/2\rangle$	−	∩	$(3/2; -89/16)$ es P.I.
$\langle 3/2; +\infty\rangle$	+	∪	

Ejemplo 28. Analice la concavidad y halle los puntos de inflexión (si existen) de $f(x) = \dfrac{x+3}{3-x}$.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $f'(x) = \dfrac{6}{(x-3)^2}$ y $f''(x) = -\dfrac{12}{(x-3)^3}$

$x = 3$ no es punto crítico de inflexión (no pertenece al dominio). En consecuencia, f no tiene puntos de inflexión.

El análisis de los signos de la segunda derivada se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; 3\rangle$	+	∪	no existe
$\langle 3; +\infty\rangle$	−	∩	

La gráfica se muestra en la figura 7.27.

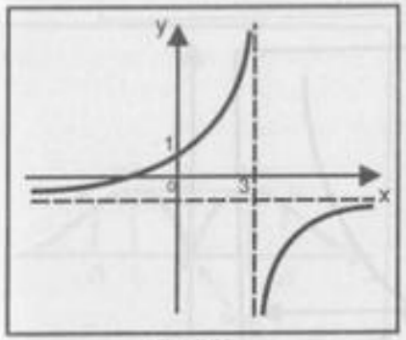


Fig. 7.27

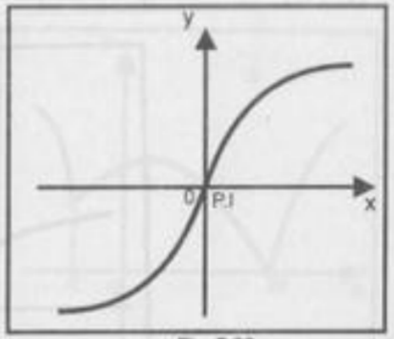


Fig. 7.28

www.FreeLibros.com

Ejemplo 29. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$ (su gráfica se muestra en la figura 7.28).

b) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ y $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

Punto crítico de inflexión: $x = 0$ ($f''(x)$ no existe)

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; 0 \rangle$	+	∪	$(0; 0)$ es P.I.
$\langle 0; +\infty \rangle$	−	∩	

Ejemplo 30. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función $h(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{si } x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{x-1}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Solución

a) $D_h = \mathbb{R}$ y h es continua en $\mathbb{R}$ (su gráfica se muestra en la figura 7.29).

b) $h'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$ y $h''(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Punto crítico de inflexión: $x = 1$.

El análisis de los signos de $h''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; 1 \rangle$	−	∩	$(1; 0)$ es P.I.
$\langle 1; +\infty \rangle$	+	∪	

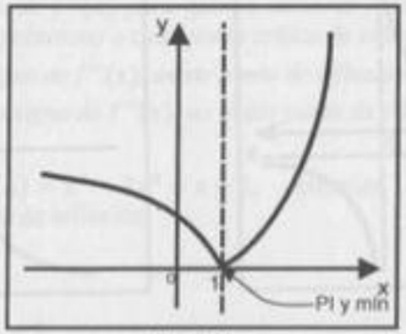


Fig. 7.29

Ejemplo 31. Determine los intervalos de crecimiento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = \dfrac{4|x|}{1+x^2}$.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \dfrac{4x}{|x|} \cdot \dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \neq 0$

Puntos críticos: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1 \rangle$	+	creciente	$f(-1) = 2$ máx.
$\langle -1; 0 \rangle$	−	decreciente	$f(0) = 0$ mín.
$\langle 0; 1 \rangle$	+	creciente	$f(1) = 2$ máx.
$\langle 1; +\infty \rangle$	−	decreciente	

c) $f''(x) = \dfrac{4x}{|x|} \cdot \dfrac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$

Puntos críticos de inflexión: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -\sqrt{3} \rangle$	+	∪	$P(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ es P.I.
$\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$	−	∩	
$\langle 0; \sqrt{3} \rangle$	−	∩	$P(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ es P.I.
$\langle \sqrt{3}; +\infty \rangle$	+	∪	

La gráfica se muestra en la figura 7.30.

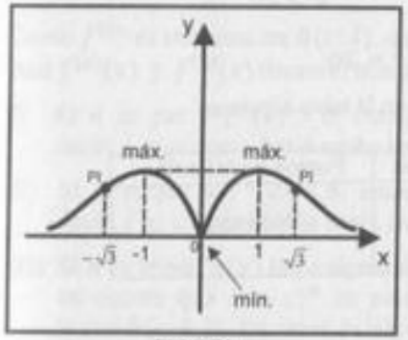


Fig. 7.30

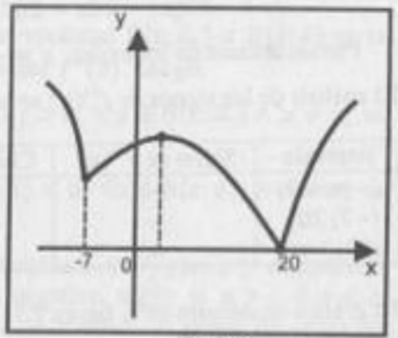


Fig. 7.31

www.FreeLibros.com

Ejemplo 32. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-3| - \text{Sgn}(x^4 - 81)}, & \text{si } x \in \langle -\infty; -7\rangle \\ \frac{1}{3}(x+8)^{1/3}(x-20)^{2/3}, & \text{si } x \in [-7; 20] \\ \sqrt[7]{x^2 - 10x - 200}, & \text{si } x \in \langle 20; +\infty\rangle \end{cases}$,

determine los intervalos de crecimiento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

Solución

a) $D_f = \mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}, & x < -7 \\ \dfrac{3x-4}{9(x+8)^{2/3}(x-20)^{1/3}}, & -7 < x < 20 \\ \dfrac{2x-10}{7(x^2-10x-200)^{6/7}}, & x > 20 \end{cases}$$

Puntos críticos: $x = -7$, $x = 4/3$ y $x = 20$

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -7\rangle$	$-$	decreciente	$f(-7) = 3$ mín. rel.
$\langle -7; 4/3\rangle$	$+$	creciente	$f(4/3) = 4{,}938$ máx. rel.
$\langle 4/3; 20\rangle$	$-$	decreciente	$f(20) = 0$ mín. rel.
$\langle 20; +\infty\rangle$	$+$	creciente	

c) $$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4(2-x)^{3/2}}, & x < -7 \\ -\dfrac{1568}{27(x+8)^{5/3}(x-20)^{4/3}}, & -7 < x < 20 \\ -\dfrac{10(x^2-10x+340)}{49(x^2-10x-200)^{13/7}}, & x > 20 \end{cases}$$

Puntos críticos de inflexión: $x = -7$ y $x = 20$.

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -7\rangle$	$-$	$\cap$	No existe
$\langle -7; 20\rangle$	$-$	$\cap$	
$\langle 20; +\infty\rangle$	$-$	$\cap$	

La gráfica se muestra en la figura 7.31.

7.5 CONDICIONES SUFICIENTES PARA CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y EXTREMOS CON LA DERIVADA n-ÉSIMA

Hay situaciones en que las condiciones de las secciones 7.2 y 7.4 no son aplicables. Por ejemplo, en la función $f(x) = (x-3)^4$ no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada para hallar sus valores extremos. En lo que sigue, se verá un criterio para determinar los valores extremos, la concavidad y los puntos de inflexión con la ayuda de la n-ésima derivada.

Proposición 6 (Condición suficiente de concavidad y puntos de inflexión con la n-ésima derivada)

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con dominio D, tiene las siguientes condiciones:

a) Derivadas continuas hasta el orden n en una vecindad $B(c;\delta) \subset D$

b) $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$

c) $f^{(n)}(c) \neq 0$

Entonces,

I) Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

II) Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en $x = c$.

III) Si n es impar, existe punto de inflexión en $x = c$.

Demostración

Sea $u(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)$ para $x \in D$ ... (14)

La hipótesis (a) nos permite desarrollar f por la Fórmula de Taylor con resto de Lagrange de orden $(n-1)$ en la vecindad $B(c;\delta)$ como

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n)}[c + \theta(x-c)],$$

con $0 < \theta < 1$.

Sustituyendo esta expresión en (14) y teniendo en cuenta la hipótesis (b), se tiene

$$u(x) = \frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n)}[c + \theta(x-c)], \quad 0 < \theta < 1$$

Como $f^{(n)}$ es continua en $B(c;\delta)$, existe una vecindad $B(c;\delta_1) \subset B(c;\delta)$ en la cual $f^{(n)}(x)$ y $f^{(n)}(c)$ tienen el mismo signo que $f^n(c)$. Luego:

I) Si n es par y $f^n(c) > 0$, entonces $u(x) > 0$, $\forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c$; es decir, f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

II) Si n es par y $f^n(c) < 0$, entonces $u(x) < 0$, $\forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c$; es decir, f es cóncava hacia abajo en $x = c$.

III) Si n es impar, $u(x)$ tiene signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$ (teniendo en cuenta que $(x-c)^n$ es positivo o negativo según si $x > c$ ó $x < c$, $\forall x \in B(c;\delta_1)$). En otras palabras, en $x = c$ existe un punto de inflexión para f.

www.FreeLibros.com

Proposición 7 (Condición suficiente de extremo y puntos de inflexión)

Si $f: D \to \mathbb{R}$ tiene las siguientes condiciones:

a) Derivadas continuas hasta el orden n en una vecindad $B(c;\delta) \subset D$

b) $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$

c) $f^{(n)}(c) \neq 0$

Entonces,

I) Si n es par y $f^{n}(c) > 0$, entonces c es un punto de mínimo de f.

II) Si n es par y $f^{n}(c) < 0$, entonces c es un punto de máximo de f.

III) Si n es impar, en $x = c$ existe punto de inflexión.

Demostración

Como $f'(c) = 0$, entonces $u(x) = f(x) - f(c)$, $\forall x \in B(c;\delta)$. Aplicando la proposición anterior, tenemos:

I) Si n es par y $f^{n}(c) > 0$, existe una vecindad $B(c;\delta_1) \subset B(c;\delta)$ tal que $f(x) - f(c) = u(x) > 0$, $\forall x \in B(c;\delta_1) \wedge x \neq c$. Luego, $\forall x \in B(c;\delta_1)$ con $x \neq c$, se tiene $f(x) > f(c)$; es decir, c es un punto de mínimo de f.

II) Si n es par y $f^{n}(c) < 0$, existe una vecindad $B(c;\delta_1) \subset B(c;\delta)$ tal que $f(x) - f(c) = u(x) < 0$, $\forall x \in B(c;\delta_1)$ con $x \neq c$; es decir, c es un punto de máximo de f.

III) Si n es impar, en $x = c$ existe punto de inflexión, es decir, $P(c, f(c))$ es punto de inflexión donde la tangente es horizontal, pues $f'(c) = 0$.

Ejemplo 33. Determine los valores extremos de $f(x) = (x-3)^4$.

Solución

$f'(x) = 4(x-3)^3$, $f''(x) = 12(x-3)^2$, $f'''(x) = 24(x-3)$ y $f^{(4)}(x) = 24$

La ecuación $f'(x) = 0$ admite una única solución en $x = 3$ (punto crítico).

Como $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$, $f^{(4)}(3) > 0$ y $n = 4$ es par, entonces existe un mínimo en $x = 3$, y el valor mínimo es $f(3) = 0$.

Ejemplo 34. Determine los puntos de inflexión de $f(x) = (x-3)^5 + 4$.

Solución

$$f'(x) = 5(x-3)^4,\ f''(x) = 20(x-3)^3,\ f'''(x) = 60(x-3)^2,$$
$$f^{(4)}(x) = 120(x-3) \text{ y } f^{(5)}(x) = 120.$$

Como $f''(3) = f'''(3) = f^{(4)}(3) = 0$, $f^{(5)}(3) \neq 0$ y $n = 5$ es impar, entonces en $x = 3$ existe punto de inflexión en $x = 3$. Por tanto, $P(3;4)$ es punto de inflexión y la tangente en este punto es horizontal, pues $f'(3) = 0$.

Ejemplo 35. Determine los valores extremos de $f(x) = 6 - (x+2)^6$.

Solución

$$f'(x) = -6(x+2)^5,\ f''(x) = -30(x+2)^4,\ f'''(x) = -120(x+2)^3,$$
$$f^{(4)}(x) = -360(x+2)^2,\ f^{(5)}(x) = -720(x+2) \text{ y } f^{(6)}(x) = -720$$

La ecuación $f'(x) = 0$ admite solución única en $x = -2$ (punto crítico) y como $f'(-2) = f''(-2) = \ldots = f^{(5)}(-2) = 0$, $f^{(6)}(-2) < 0$ y $n = 6$ es par, entonces $x = -2$ es un punto de máximo, y el valor máximo es $f(-2) = 6$.

7.6 TRAZADO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La construcción de la gráfica de una función es muy importante, pues con ella podemos determinar el comportamiento de la función. Se construye la gráfica con la ayuda de los límites y de las derivadas.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1) Determinar el Dominio de f (D_f).
2) Determinar las intersecciones con los ejes.
3) Verificar la simetría de la función, la existencia de asíntotas, y calcular límites en los extremos del dominio y en los puntos de discontinuidad, a fin de determinar el comportamiento de la función en dichos puntos.
4) Determinar los intervalos de crecimiento y los valores extremos de la función.
5) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
6) Construir la gráfica de la función (con la ayuda de la información obtenida).

Ejemplo 36. Trace la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 5}$.

Solución

1) $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$.

2) Intersecciones: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2/5$ y $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 2$.
Los puntos de intersección con los ejes coordenados son: $(0; 2/5)$, $(-1; 0)$ y $(2; 0)$.

3) La gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y, pues $f(-x) \neq f(x)$.

Asíntota vertical: $x = 5$ porque $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$.

Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Asíntotas oblicuas: $y = x + 4$ es la única asíntota oblicua (a la derecha y a la izquierda), pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 4$.

www.FreeLibros.com

4) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 7}{(x-5)^2}$

Puntos críticos: $x = 5 - 3\sqrt{2} = \alpha$ y $x = 5 + 3\sqrt{2} = \beta$

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; \alpha\rangle$	+	creciente	$f(\alpha) \cong 0{,}51$ máx.
$\langle \alpha; 5\rangle$	−	decreciente	
$\langle 5; \beta\rangle$	−	decreciente	$f(\beta) = 17{,}6$ máx.
$\langle \beta; +\infty\rangle$	+	creciente	

5) Como $f''(x) = \dfrac{36}{(x-5)^3}$, no existe puntos críticos de inflexión.

En la siguiente tabla, se muestra el análisis de los signos de $f''(x)$.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; 5\rangle$	−	∩	no tiene puntos de inflexión
$\langle 5; +\infty\rangle$	+	∪	

6) La gráfica de f se ilustra en la fig. 7.32.

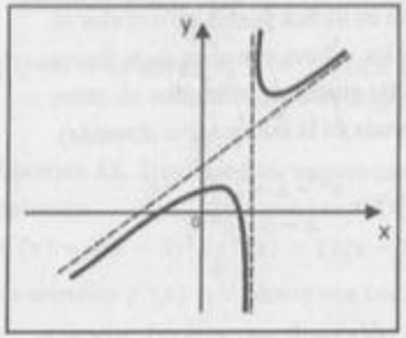


Fig. 7.32

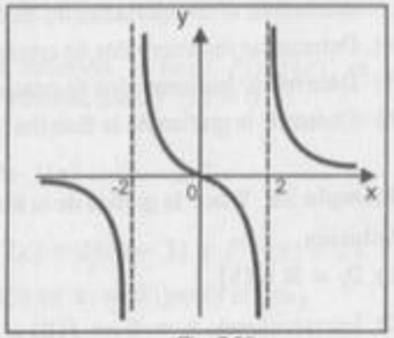


Fig. 7.33

Ejemplo 37. Trace la gráfica de $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

Solución

1) $D_g = \mathbb{R} - \{2, -2\}$

2) Intersecciones con los ejes: $(0; 0)$

3) La gráfica de g no es simétrica con respecto al eje y porque $g(-x) \neq g(x)$.

Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$, pues

$\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -2^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} g(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $y = 0$, pues $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

No tiene asíntotas oblicuas.

4) $g'(x) = -\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$. No hay puntos críticos y $g'(x) < 0$, $\forall x \in D_g$.

Luego, g es decreciente en $\langle -\infty; -2\rangle, \langle -2; 2\rangle$ y $\langle 2; +\infty\rangle$.

5) $g''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$

Punto crítico de inflexión: $x = 0$

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -2\rangle$	−	∩	
$\langle -2; 0\rangle$	+	∪	$P(0; 0)$ es P.I.
$\langle 0; 2\rangle$	−	∩	
$\langle 2; +\infty\rangle$	+	∪	

6) La gráfica se muestra en la fig. 7.33.

Ejemplo 38. Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 10x + 9}$.

Solución

1) $D_f = \mathbb{R} - \{1; 9\}$.

2) Intersecciones con los ejes: $(0; 1)$, $(-9; 0)$ y $(-1; 0)$.

3) La gráfica no es simétrica respecto al eje y.

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 9$, pues

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 9^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 9^+} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $y = 1$, pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

4) $f'(x) = -\dfrac{20(x-3)(x+3)}{(x-1)^2(x-9)^2}$

Puntos críticos: $x = -3$ y $x = 3$

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -3\rangle$	−	decreciente	$f(-3) = -1/4$ mín.
$\langle -3; 1\rangle$	+	creciente	
$\langle 1; 3\rangle$	+	creciente	$f(3) = -4$ máx.
$\langle 3; 9\rangle$	−	decreciente	
$\langle 9; +\infty\rangle$	−	decreciente	

www.FreeLibros.com

5) $f''(x) = \dfrac{40(x^3 - 27x + 90)}{(x-1)^3(x-9)^3}$

La ecuación $f''(x) = 0$ admite una única raíz $c = -6{,}406\ldots$.

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; c\rangle$	$-$	∩	∃ P. I. en $x = c$
$\langle c; 1\rangle$	$+$	∪	
$\langle 1; 9\rangle$	$-$	∩	
$\langle 9; +\infty\rangle$	$+$	∪	

6) La gráfica se muestra en la fig. 7.34.

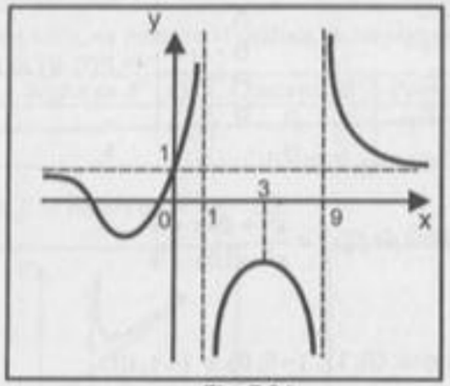


Fig. 7.34

Ejemplo 39. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}$.

Solución

1) $D_f = \langle -\infty; -4] \cup [-1; 1] \cup [4; +\infty\rangle$.

2) Intersecciones con los ejes: $(0; 4)$, $(\pm 1; 0)$, $(\pm 4; 0)$.

3) Es simétrica respecto al eje y, pues $f(-x) = f(x)$.

Asíntotas: no tiene.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty .$$

4) $f'(x) = \dfrac{x(2x^2 - 17)}{\sqrt{(x^2 - 16)(x^2 - 1)}}$

Punto crítico: $x = 0$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

www.FreeLibros.com

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -4\rangle$	$-$	decreciente	
$\langle -1; 0\rangle$	$+$	creciente	$f(0) = 4$ mín.
$\langle 0; 1\rangle$	$-$	decreciente	
$\langle 4; +\infty\rangle$	$+$	creciente	

5) $f''(x) = \dfrac{2x^6 - 51x^4 + 96x^2 - 272}{\sqrt{(x^2 - 16)^3(x^2 - 1)^3}}$

La ecuación $f''(x) = 0$ admite dos raíces reales $x = \pm 4{,}9.. = \pm\alpha$, que son los puntos críticos de inflexión.

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -\alpha\rangle$	$+$	∪	$(-\alpha; 13{,}58..)$
$\langle -\alpha; -4\rangle$	$-$	∩	
$\langle -1; 1\rangle$	$-$	∩	
$\langle 4; \alpha\rangle$	$-$	∩	$(\alpha; 13{,}58..)$
$\langle \alpha; +\infty\rangle$	$+$	∪	

6) La gráfica de la función se muestra en la figura 7.35.

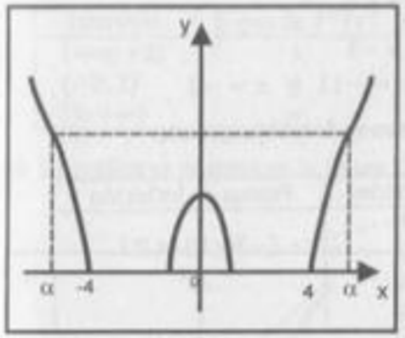


Fig. 7.35

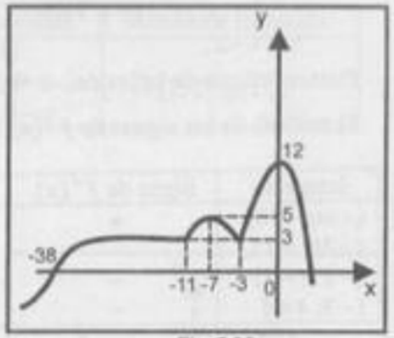


Fig. 7.36

Ejemplo 40. Trace la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x + 38}, & x \le -11 \\ \sqrt{25 - (x+7)^2}, & -11 < x < -3 \\ 12 - x^2, & x \ge -3 \end{cases}$$

Solución

1) $D_f = \mathbb{R}$ y f es continua en D_f.

2) Intersecciones con los ejes: $(0; 12)$, $(-38; 0)$, $(\sqrt{12}; 0)$.

3) No tiene asíntotas. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

4) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+38)^2}}, & x < -11 \\ -\dfrac{x+7}{\sqrt{25-(x+7)^2}}, & -11 < x < -3 \\ -2x, & x > -3 \end{cases}$

Puntos críticos: $x = -38$, $x = -11$, $x = -7$, $x = -3$ y $x = 0$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -38\rangle$	+	creciente	
$\langle -38; -11\rangle$	+	creciente	
$\langle -11; -7\rangle$	+	creciente	Máx. $f(-7) = 7$
$\langle -7; -3\rangle$	−	decreciente	Mín. $f(-3) = 3$
$\langle -3; 0\rangle$	+	creciente	Máx. $f(0) = 12$
$\langle 0; +\infty\rangle$	−	decreciente	

5) $f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x+38)^5}}, & x < -11 \\ -\dfrac{25}{\sqrt{[25-(x+7)^2]^3}}, & -11 < x < -3 \\ -2, & x > -3 \end{cases}$

Puntos críticos de inflexión: $x = -38$, $x = -11$ y $x = -3$.

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -38\rangle$	+	∪	$(-38; 0)$ es P.I.
$\langle -38; -11\rangle$	−	∩	
$\langle -11; -3\rangle$	−	∩	
$\langle -3; +\infty\rangle$	−	∩	

6) La gráfica se muestra en la figura 7.36.

Ejemplo 41. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

Solución

1) $D_f = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)}$ es continua en $\mathbb{R}$.

2) Intersecciones con los ejes: $(0; -2)$, $(-2; 0)$ y $(2; 0)$.

3) No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asíntotas oblicuas: $y = x + 2/3$ (a la derecha y a la izquierda), pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 2/3$$

4) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{3\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)^2}} = \dfrac{(3x-2)}{3(x-2)^{2/3}(x+2)^{1/3}}$

Puntos críticos: $x = -2$, $x = 2/3$ y $x = 2$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -2\rangle$	+	creciente	$f(-2) = 0$ máx.
$\langle -2; 2/3\rangle$	−	decreciente	$f(2/3) = 2{,}11$ mín. relat.
$\langle 2/3; 2\rangle$	+	creciente	
$\langle 2; +\infty\rangle$	+	creciente	

5) $f''(x) = -\dfrac{32}{9(x-2)^{5/3}(x+2)^{4/3}}$

Puntos críticos de inflexión: $x = -2$ y $x = 2$

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -2\rangle$	+	∪	
$\langle -2; 2\rangle$	+	∪	$(2; 0)$ es P.I.
$\langle 2; +\infty\rangle$	−	∩	

6) La gráfica se muestra en la figura 7.37.

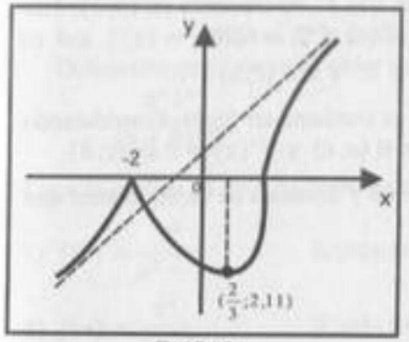


Fig. 7.37

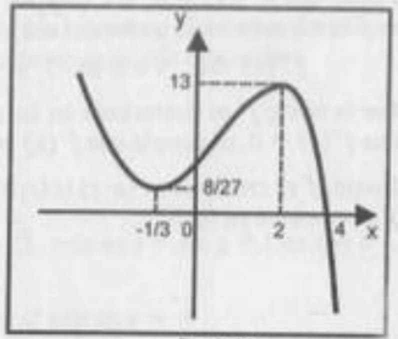


Fig. 7.38

www.FreeLibros.com

Ejemplo 42. Mediante la derivada, demuestre que $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ admite una única raíz α comprendida entre 3 y 4.

Solución

Considerando que la raíz de $f(x)$ es la intersección de su gráfica con el eje x, mostraremos que la gráfica interseca al eje x en un solo punto, y este punto está comprendido entre 3 y 4. En efecto,

$$f'(x) = -6x^2 + 10x + 4 = -2(x-2)(3x+1)$$

Los puntos críticos son $x = -1/3$ y $x = 2$. En la siguiente tabla, se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1/3\rangle$	−	decreciente	
$\langle -1/3; 2\rangle$	+	creciente	$f(-1/3) = 8/27$ mín.
$\langle 2; +\infty\rangle$	−	decreciente	$f(2) = 13$ máx. relat.

Como $-1/3$ es un punto de mínimo, $0 < f(-1/3) \leq f(x)$, $\forall x \in \langle -\infty; 2]$. Luego, f no tiene raíces reales en $\langle -\infty; 2]$.

Puesto que f es decreciente en $\langle 2; +\infty\rangle$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, entonces f admite una única raíz real en el intervalo $\langle 2; +\infty\rangle$. Como $f(3) = 4$ y $f(4) = -31$, se concluye que f admite una única raíz real que está comprendida entre 3 y 4 (Fig. 7.38).

Ejemplo 43. Sea $f: \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'''(x) > 0$, $\forall x \in \langle a; b\rangle$. Si existe $c \in \langle a; b\rangle$ con la condición $f'(c) = f''(c) = 0$, pruebe que f es creciente en $\langle a; b\rangle$.

Solución

Puesto que $f'''(x) > 0$, $\forall x \in \langle a; b\rangle$, se sigue que f'' es creciente en $\langle a; b\rangle$, esto es f es cóncava hacia arriba en $\langle a; b\rangle$. Como $f''(c) = 0$, se tiene

$$f''(x) < 0, \ \forall x \in \langle a; c\rangle \ \text{ y } \ f''(x) > 0, \ \forall x \in \langle c; b\rangle$$

Por lo tanto, f' es decreciente en $\langle a; c\rangle$ y f' es creciente en $\langle c; b\rangle$. Considerando que $f'(c) = 0$, se cumple que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \langle a; c\rangle$ y $f'(x) > 0$ en $\langle c; b\rangle$.

Luego, f es creciente en $\langle a; c\rangle \cup \langle c; b\rangle$ y, por ser f continua en $\langle a; b\rangle$, resulta que f es creciente en $\langle a; b\rangle$.

EJERCICIOS

1) Determine la concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$ R. $\exists$ P. I. en $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$

b) $f(x) = 4\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$ R. $\exists$ P. I. en $x = 1$

c) $f(x) = (2x+1)^2 - \frac{3x+1}{2x-1}$ R. $\exists$ P. I. en $x = \frac{1 + \sqrt[3]{5/2}}{2}$

d) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ R. $\exists$ P. I. en $x = -2$

e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ R. $\exists$ P. I. en $x = -3$

2) Pruebe que $f(x) = \frac{x^2+4}{1+3x^2}$ admite dos puntos de inflexión en c_1 y c_2, con $-1 < c_1 < 0$ y $0 < c_2 < 1$.

3) Sea $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x - 2$.

a) ¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que exista punto de inflexión en $x = 1$? R. $3a + b = -6$

b) ¿Existen a y b de modo que en $x = 1$ haya punto de inflexión con tangente horizontal en dicho punto? R. $a = -3$, $b = 0$

4) Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1; 2)$.

5) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b y c de manera que $(1; 2)$ sea punto de inflexión de la gráfica de f y la pendiente de la tangente en dicho punto sea -2.

6) Sea $f(x) = |x|^a |x-1|^b$, donde a y b son números racionales positivos. Demuestre que f tiene un valor máximo relativo igual a la expresión

$$\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$$

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ R. máx. en $x = -\sqrt{3}$, mín en $x = \sqrt{3}$ y P. I. en $x = 0$

8) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ R. máx en $x = 0$ y mín en $x = 4$

9) $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ R. máx. en $x = 4$

www.FreeLibros.com

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ R. $x = 0$ es punto de mín rel.

11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$ R. $x = 0$ punto de mín abs.

12) $f(x) = \dfrac{x^5 - 32}{8x^2}$ R. $x = -2\sqrt[5]{2/3}$ punto de máx rel. y P.I en $x = 2$

13) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

R. máx local en $x = 0$, mín local en $x = \pm\sqrt{5}$ y P.I. en $x = \pm\sqrt{5/3}$

14) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 5x + 5}$

15) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{16x^2 + 4x - 6}{9x^2 - 6x - 8}}$

17) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2 - 6x - 8}{16x^2 + 4x - 6}}$

18) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + 2x - 24}}$

19) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{20 + x - x^2}{x^2 + 4x - 12}}$

20) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1 \\ -\sqrt[3]{x+1}, & x > 1 \end{cases}$

21) $f(x) = \dfrac{2|x-2|}{x^2 + 4}$

22) $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

23) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

24) $f(x) = \sqrt{5+x} - \sqrt{8-x}$

25) $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$

26) $f(x) = \begin{cases} |x+6|, & -6 \leq x < -3 \\ x^2 - 6, & -3 \leq x < 0 \\ x^4 - 6, & 0 \leq x \leq 3 \\ 66 - x^2 - 6x, & 3 < x \leq 6 \\ 66, & |x| > 6 \end{cases}$

27) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+42}, & x \leq -10 \\ \sqrt[4]{25 - (x+7)^2}, & -10 < x \leq -2 \\ \dfrac{x+2}{x^2+2}, & x > -2 \end{cases}$

www.FreeLibros.com

7.7 INTERPRETACIÓN CINEMÁTICA DE LA DERIVADA: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Supongamos que una partícula P se mueve sobre una recta orientada, en la cual se fija un origen 0, y que la abscisa de P en cada instante t está dada por la ecuación $S = f(t)$.

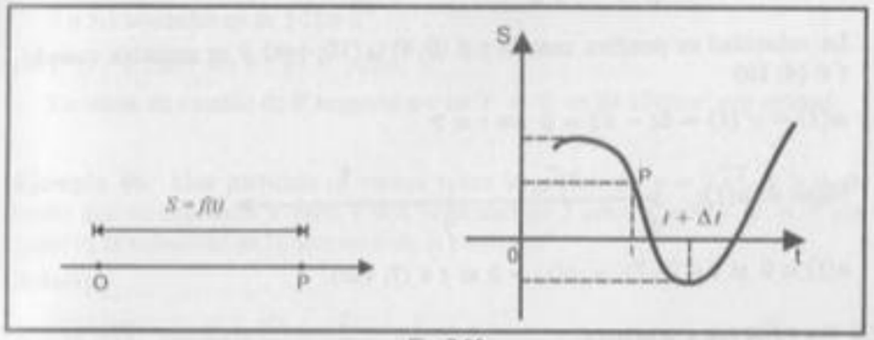


Fig. 7.39

La **velocidad media** de la partícula entre los instantes t y $t + \Delta t$ se define por el cociente

$$V_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

Se denomina **velocidad de la partícula en el instante t** o **velocidad instantánea en t** al límite

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} V_m$$

En otras palabras, la velocidad instantánea en t es la derivada de f en t o

$$v(t) = f'(t) = \frac{dS}{dt}$$

Suponiendo que la velocidad es una función $v = v(t)$, la **aceleración** en el instante t es definida como la derivada de la función $v(t)$, o sea:

$$a(t) = \frac{d(v(t))}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = f''(t)$$

Ejemplo 44. Una partícula P se mueve sobre el eje OX, de modo que en el instante t la abscisa es dada por $S(t) = t^3 - 21t^2 + 120t$, $t \geq 0$, donde S está en metros y t en segundos.

a) Calcule la velocidad en el instante $t = 2$.

b) Determine para qué valores de t la velocidad es positiva y para qué valores de t es negativa.

c) Determine la aceleración de la partícula y analice su signo.

Solución

a) $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 42t + 120 \Rightarrow v(2) = 48\text{m/s}$

b) $S'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 4\,,\ t_2 = 10.$

La velocidad es positiva cuando $t \in \langle 0; 4\rangle \cup \langle 10; +\infty\rangle$ y es negativa cuando $t \in \langle 4; 10\rangle$.

c) $a(t) = v'(t) = 6t - 42 = 0 \Rightarrow t = 7$

$a(t) < 0$ si $t \in \langle 0; 7\rangle$ y $a(t) > 0$ si $t \in \langle 7; +\infty\rangle$.

7.8 RAZÓN DE CAMBIO

La derivada también se utiliza para determinar la razón de cambio instantánea o simplemente razón de cambio de una variable respecto a otra. Por ejemplo, se usa para calcular velocidades de objetos en movimiento rectilíneo, crecimiento de poblaciones, ritmo de cambio de una producción, etc. Para definir este concepto, supongamos que las variables x e y están relacionadas por $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a $x_1 + \Delta x$, entonces el cambio correspondiente de la variable y es

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Así, la **razón** o **tasa promedio de cambio** de y con respecto a x cuando x cambia de x_1 a $x_1 + \Delta\, x$ es dada por

$$\text{Razón promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en la variable } y}{\text{cambio en la variable } x}$$

Al límite de esta razón de cambio se le llama **razón instantánea de cambio** de y con respecto a x en $x = x_1$, esto es,

$$\text{Razón instantánea de cambio} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Por consiguiente, $f'(x_1)$ es la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = x_1$.

Ejemplo 45. Un cilindro circular recto tiene una altura constante de 10 u. Si V es el volumen del cilindro y r es el radio de su base, halle la tasa de cambio promedio de V respecto al radio cuando r cambia de 5 a 5,1. Además, halle la razón de cambio de V respecto a r, si $r = 5$.

Solución

a) $V(r) = 10\pi r^2$

Si $r_1 = 5$ y $r_1 + \Delta r = 5{,}1 \Rightarrow \Delta r = 0{,}1$. Entonces

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V(r_1 + \Delta r) - V(r_1)}{\Delta r} = 10\pi(2r_1 + \Delta r) = 101\pi$$

Por tanto, la razón promedio de cambio de V respecto a r cuando r cambia de 5 a 5,1 unidades es de $101\pi\, u^3$.

b) $V'(r) = 20\pi r \Rightarrow V'(5) = 100\pi$.

La razón de cambio de V respecto a r en $r = 5$ es de $100\pi u^2$ por unidad.

Ejemplo 46. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x > 0$, de modo que su ordenada y varía a una velocidad de 5 cm/s. Cuando $y = 4$ cm, ¿cuál es la velocidad de la abscisa x de la partícula?

Solución

Si $y = \sqrt[3]{x^2}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x > 0$.

Se sabe que $\dfrac{dy}{dt} = 5\dfrac{\text{cm}}{\text{seg}}$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$, de donde $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3\sqrt[3]{x}}{2}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

Si $y = 4 \Rightarrow x = 8 \ \wedge\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3\sqrt[3]{8}}{2}\cdot 5 = 15$ cm/s.

Luego, la abscisa cambia a una velocidad de 15 cm/s.

Ejemplo 47. Un poste de 6 m de altura tiene un farol en la parte superior. Un hombre de 2 m de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de 1,2 m/s. Cuando la distancia de la base del poste a la punta de la sombra del hombre es de 8 m,

a) ¿Con qué velocidad crece su sombra?

b) ¿Con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?

Solución

a) De la Fig. 7.40, se quiere conocer $\dfrac{dy}{dt}$, sabiendo que $\dfrac{dx}{dt} = 1{,}2 \ \wedge\ x + y = 8$.

Por semejanza de triángulos, se obtiene que $\dfrac{y}{x+y} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2}$.

Derivando con respecto a t la última igualdad, se obtiene $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt}$.

Considerando que $\dfrac{dx}{dt} = 1{,}2$ m/s, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 0{,}6$ m/s

Luego, la sombra crece a razón de 0,6 m/s.

www.FreeLibros.com

b) Se pide hallar $\frac{dw}{dt}$, sabiendo que $\frac{dx}{dt} = 1{,}2$, $\frac{dy}{dt} = 0{,}6$ y $z = x + y = 8$.

Por el Teorema de Pitágoras, $w^2 = z^2 + 6^2 \Rightarrow w = \sqrt{z^2 + 36}$

Derivando con respecto a t, se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{z}{\sqrt{z^2+36}}\frac{dz}{dt} = \frac{z}{\sqrt{z^2+36}} \cdot \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

Sustituyendo los valores $z = 8$, $\frac{dx}{dt} = 1{,}2\text{m/s}$ y $\frac{dy}{dt} = 0{,}6\text{m/s}$, se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{8}{\sqrt{8^2+36}}(1{,}2 + 0{,}6) = 1{,}44 \text{ m/s}$$

Por tanto, la punta de la sombra se mueve a razón de $1{,}44$ m/s con respecto al farol.

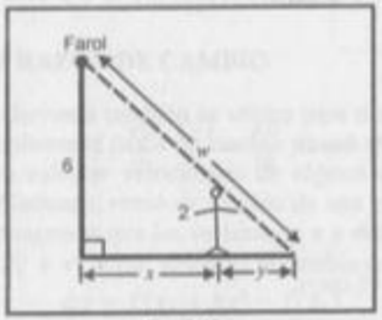


Fig. 7.40

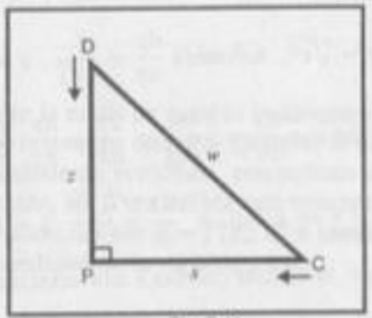


Fig. 7.41

Ejemplo 48. Un controlador aéreo sitúa dos aviones C y D en la misma altitud. Debido a un error en la transmisión de datos, ambos convergen en su vuelo hacia un mismo punto P en ángulo recto (Fig. 7.41). El controlador detecta que el avión C viaja a 450 km/h y el avión D, a 600 km/h.

a) ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones cuando C y D están a 150 km y 200 km del punto de convergencia, respectivamente?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?

Solución

a) Se quiere conocer $\frac{dw}{dt}$, si $\frac{dx}{dt} = -450$, $\frac{dz}{dt} = -600$, $x = 150$ y $z = 200$.

Por el teorema de Pitágoras, se obtiene que $w^2 = z^2 + x^2$ $(*)$

Derivando implícitamente $(*)$ con respecto al tiempo t, obtenemos

$$2w\frac{dw}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$$

Reemplazando los valores $\frac{dx}{dt} = -450\text{km/h}$, $\frac{dz}{dt} = -600\text{km/h}$, $x = 150\text{km}$, $z = 200\text{km}$ y $w = 250\text{km}$, resulta que $\frac{dw}{dt} = -750\text{km/h}$.

Por consiguiente, la distancia entre los dos aviones disminuye a razón de 750 km/h.

b) El controlador dispone de 1/3 hora = 20 minutos para cambiar la trayectoria de los aviones, pues luego de ese tiempo los dos aviones llegarían al punto de convergencia y colisionarían.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 5, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada está dada por $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos.

a) Determine la velocidad de la partícula en el instante t.

b) Determine los intervalos para t donde la velocidad cambia de signo.

c) Determine la aceleración de la partícula y analice su signo.

d) Trace la gráfica de $s(t)$.

1) $s = 4t^2 - 7t + 8$ 2) $s = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2$

3) $s = t^4 - 2t^3 + t^2$ 4) $s = t^2 + \frac{16}{t}$ $(t > 0)$

5) $s = t^3 - 9t^2 + 15t + 2$

6) Un punto se mueve sobre la gráfica de $y = \sqrt{9 + x^2}$, de modo que su abscisa x varía a una velocidad constante de 5 cm/s. Calcule la velocidad de la ordenada y en el instante en que $x = 4$ cm.

7) Un punto se mueve sobre la curva $y^4 - x = 0$, $x > 0$, $y > 0$, de modo que la velocidad de la ordenada $\frac{dy}{dt} = \beta$ (constante). Muestre que la aceleración de la abscisa es $\frac{d^2x}{dt^2} = 12\beta^2\sqrt{x}\beta$.

8) Las posiciones de dos partículas P_1 y P_2 sobre la recta coordenada, al cabo de t segundos, están dadas por

$$S_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5 \text{ y } S_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$$

¿En qué momento las dos partículas tienen la misma velocidad?

9) Un objeto que se lanza verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio con una velocidad inicial de v_0 pies/s, viaja según la ecuación $S = v_0 t + 16t^2$ pies en t segundos. Si toca el suelo a los 2,5s con una velocidad de 110 pies/s, ¿cuál es la altura del edificio? R. 175 pies

www.FreeLibros.com

10) La empresa XX estima que si gasta en publicidad $1000x$ soles, venderá y unidades de cierto artículo, donde $y = 5 + 400x - 2x^2$. Determine la razón promedio de cambio de y con respecto a x cuando el presupuesto para publicidad aumenta de S/. 10000 a S/. 11000 y halle la razón de cambio cuando el presupuesto para publicidad es de S/. 10000
R. 358 y 360

11) La utilidad bruta anual de la empresa YY, t años después del 1° de Enero de 2006, es de p millones de soles y $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Halle la tasa a la cual estuvo cambiando la utilidad bruta el 1° de Enero del 2008 y determine la tasa a la cual cambiará la utilidad bruta el 1° de Enero del 2012.
R. 3,6 y 6,8

12) La ecuación de demanda de un de artículo es $q = 100 - 3p - 2p^2$, donde q unidades se demandan cuando p soles es su precio unitario. Calcular la tasa de cambio instantánea de la demanda con respecto al precio cuando $p = 5$.

13) Si el agua de una piscina está siendo retirada y V litros es el volumen de agua en la piscina t min. luego de iniciada la extracción, donde $V = 250(1600 - 80t + t^2)$, ¿qué tan rápido fluye el agua fuera de la piscina 5 min. después de que comienza a ser extraída?

14) Un tendedor de alambres trepa a un poste telefónico a razón de 2,5 pies/s, mientras su jefe está sentado bajo un árbol observándolo. Si el terreno es llano y el jefe está a 36 pies de la base del poste, ¿cuántos segundos tiene que trepar el tendedor de alambres para que la distancia entre él y el jefe crezca a razón de un pie/s?
R. 6,2847 s

15) Se echa agua a razón de 30 cm^3/s en una copa cónica de 10 cm de altura y de un radio superior de 5 cm ¿A qué velocidad está subiendo el nivel cuando está a 2 cm por debajo del borde?
R. $15/8\pi$ cm/s

16) Se bombe. aire a un globo, de modo que su volumen se incrementa en `00 cm^3/s. Despreciando la compresión del aire, ¿a qué ritmo crece el ra..o cuando el diámetro llega a 30 cm?
R. $2/9\pi$ cm/s

17) Una ciudad tiene forma de un cuadrado de x kms de lado. A causa del crecimiento de la población y la construcción de suburbios, x está creciendo a razón de 1/2 km/año. Halle la razón de incremento del área urbana cuando ésta ocupa 36 km^2.
R. 6 km^2/año

18) Un aeroplano, que vuela en dirección norte a 640 millas por hora, pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano, que va en dirección oeste a 600 millas por hora, está verticalmente sobre la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altura, ¿con qué rapidez se estarán separando a la 1:15 p.m.?
R. 872 millas/hora

19) Un barco se dirige hacia el sur con una velocidad de 6 km por hora y otro hacia el este, a 8km por hora. A las 16 horas, el segundo pasa por el punto donde estuvo el primero dos horas antes. Se pregunta:

a) ¿Cómo varía la distancia entre ellos a las 15 horas?
R. decrece a razón de 2,8 km/hora

b) ¿Cómo varía la distancia entre ellos a las 17 horas?
R. crece a razón de 8,73 km/hora

c) ¿Cuándo la distancia no variaba? R. 15h. 17 minutos

20) Una escalera de 4 m de largo se apoya contra un muro vertical. Si la base empieza a deslizarse a razón de 0,25 cm/s, ¿a qué velocidad cae la parte superior de la escalera cuando la base está a 1,50 m del muro?
R. 0,10 m/s

21) Una partícula se mueve a lo largo de la curva $3y = x^3 + 2$. Encuentre los puntos sobre la curva en los cuales la ordenada está cambiando 9 veces más rápido que la abscisa. R. $(3; 29/3)$ y $(-3; -25/3)$

22) La demanda de cemento está dada por la ecuación $D = -30 + 1000/p$, donde D está en miles de bolsas y p es el precio por bolsa en soles. Si el precio está subiendo a razón de un sol por bolsa a la semana, halle la tasa de variación correspondiente a la demanda (en bolsas por semana) si:

a) El precio actual es de 20 soles por bolsa. R. 2500 bolsas por semana

b) El precio actual es de 25 soles por bolsa. R. 1600 bolsas por semana

23) Una bola cae verticalmente $h = 4{,}90\,t^2$ metros en t segundos desde un punto A, que está a 14,7 m sobre el suelo. Halle la velocidad de la sombra de la bola cuando el sol está a 30° sobre el horizonte. R. 29,40 m/s

24) Una cometa que vuela a 100 m de altura es empujada horizontalmente por el viento a una velocidad de 4 m/s. Si la cuerda se va soltando desde un punto fijo, ¿a qué velocidad se aleja la cometa en el instante en que se han soltado 125 m de la cuerda? R. 2,4 m/s

25) Un peatón de 1,80 m de alto se aleja de una lámpara colocada a 5,4 m de altura, a razón de 1,2 m/s. Si el peatón se encuentra a 7,2 m de la base del poste de la lámpara, determine:

a) La velocidad del extremo de su sombra. R. 1,8 m/s

b) La razón del incremento de la longitud de la sombra. R. 0,60 m/s

26) Huyendo de un perro, una ardilla trepa por un árbol. El perro corre a razón de 12 m/s y la ardilla, a razón de 6 m/s ¿Cuál será el cambio de la distancia entre los dos cuando el perro está a 12 metros del árbol y la ardilla ha trepado 5 metros? R. 8,77 m/seg

www.FreeLibros.com

27) Desde un dique, un pescador está jalando su bote con un cordel. Éste tiene las manos 6 cm por encima del nivel del amarre de la proa, mientras recobra cuerda a 1 m/s ¿A qué velocidad se estará acercando el bote cuando la cuerda extendida mida 20 m? R. 5/4 m/s

28) Un gato, que va a una velocidad de 1,2 m/s por la calle, pasa a 0,9 m de un poste que soporta un farol a 3,60 m sobre el gato ¿A qué velocidad aumenta la distancia gato-farol un segundo después de que el gato pasó por el poste? R. 0,369 m/s

29) Dos faroles de iluminación urbana, de 60 pies de altura cada uno, están a 100 pies uno de otro. La lámpara en lo alto de uno de los postes está funcionando, mientras la del otro poste está sometida a reparación por un trabajador. Si éste deja caer su caja de herramientas desde la parte más alta del segundo poste, ¿con qué rapidez se mueve la sombra de la caja en el instante en que la caja se encuentra a 20 pies del suelo? R. $60\sqrt{10}$ pies/s

30) Una piscina tiene 25 pies de ancho, 40 pies de largo y 3 pies de profundidad en un extremo y 9 pies en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se bombea agua al interior de la piscina a razón de 10 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando tal nivel es de 4 pies en el extremo más profundo? R. 0,015 pies/min

31) Sobre una pila de forma constantemente cónica cae arena a razón de 3 pies cúbicos por minuto. Supóngase que el diámetro en la base del montón es siempre tres veces su altura ¿A qué velocidad está aumentando la altura cuando ésta ha llegado a los 4 pies? R. $1/12\pi$ pie/min

32) Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 horas más tarde? R. 65 km/h

33) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande a medida que transcurre el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h ¿Con qué rapidez crece el área si cada lado mide 8 cm? R. 13.856.. cm^2/h

34) Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de 1/50 pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo, si éste es inicialmente de 50 pies?

R. $20/\pi$ pies/min

35) Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo, a 4 millas de la rampa de lanzamiento ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3600 millas/h? R. 6000 millas/h

7.9 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS A LA ECONOMÍA

En economía es frecuente el uso de las funciones de costo, ingreso, utilidad, etc. El **análisis marginal** es la aplicación de la derivada para estimar la variación de una función ante un incremento de una unidad en su variable independiente.

Por ejemplo, si $C(x)$ es el costo de producir x unidades, a la derivada del costo $C'(x)$ se denomina **costo marginal**. Para interpretar el costo marginal, consideremos que la producción se incrementa en una unidad, es decir, si se produce $(x+1)$ unidades, entonces la variación de costo es

$$\Delta C = C(x+1) - C(x)$$

Por lo visto en diferenciales (capítulo 5), este incremento puede ser aproximado por $C'(x)$, pues en el caso de $\Delta x = 1$ se tiene

$$\Delta C = C(x+1) - C(x) \cong dC = C'(x)\Delta x = C'(x)$$

En resumen, el costo marginal $C'(x)$ es una aproximación a la variación del costo cuando se produce una unidad adicional. También se interpreta como la aproximación al costo de producción de la unidad $(x+1)$.

De manera similar, se tiene:

Si $I(x)$ es la función ingreso, $I'(x)$ es el **ingreso marginal**

Si $U(x)$ es la función utilidad, $U'(x)$ es la **utilidad marginal**

Si $P(x)$ es la función producción, $P'(x)$ es la **producción marginal**

La interpretación para estas funciones marginales es similar a la del costo marginal. Por ejemplo, la utilidad marginal es la aproximación al cambio en la utilidad cuando la variable x se incrementa en una unidad.

Ejemplo 49. Si $C(x) = 50x + 10000$ es el costo total de producir x unidades, entonces el costo marginal es $C'(x) = 50$.

(La producción de una unidad adicional hará que el costo aumente en 50 u.m.)

Ejemplo 50. Si $C = 2x^3 - 12x^2 + 50x + 40$ es la función de costo total, donde x es el número de unidades producidas, halle:

a) La función costo marginal

b) El costo marginal cuando $x = 6$. Interprete el resultado obtenido.

Solución

a) La función de costo marginal es $C'(x) = 6x^2 - 24x + 50$.

b) $C'(6) = 110$

La interpretación de este resultado es que el costo aumenta aproximadamente en 110 u.m., cuando la producción aumenta de 6 a 7 unidades. Otra interpretación es que el costo estimado de producir la unidad 7 es de 110 u.m.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 51. Si la función ingreso es $I(x) = \frac{125x}{x+5} - 5x$, donde x es la cantidad de productos vendidos, halle el ingreso marginal y la función demanda.

Solución

a) El ingreso marginal es $I'(x) = \frac{625}{(x+5)^2} - 5$.

b) Considerando que el ingreso $I = px$, donde p es el precio unitario del producto, entonces

$p = \frac{125}{x+5} - 5$ es la función demanda.

7.9.1 ELASTICIDAD

Consideremos que $q = D(p)$ es la función demanda de un producto P. Se sabe que ésta es decreciente.

Se conoce como Δq a la variación de q ante un cambio del precio Δp. De acuerdo con la figura 7.42, $\Delta q = q_2 - q_1$ y $\Delta p = p_2 - p_1$. Se observa también que $\Delta q < 0$.

En economía, se define la **elasticidad de la demanda** como una tasa media de la variación de la cantidad con respecto a la tasa media de variación del precio, esto es:

$$e = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Sin embargo, esta definición es ambigua, ya que en la fórmula de e aparecen los valores de p y q, y estos pueden ser tomados iguales a p_1 y q_1 ó p_2 y q_2. Esta dificultad se resuelve mediante las derivadas.

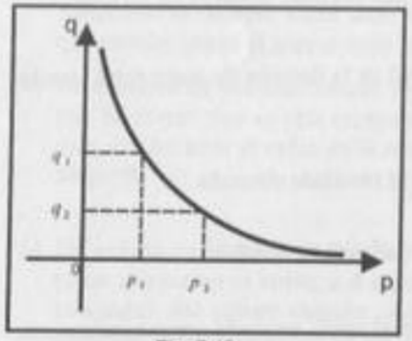


Fig. 7.42

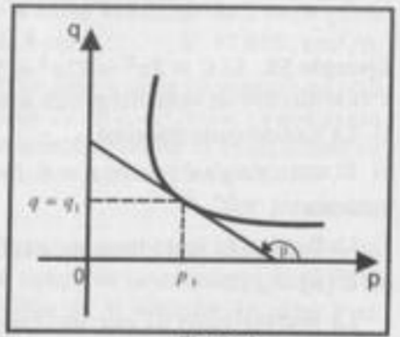


Fig. 7.43

Definición 6. La **elasticidad de la demanda**, denotada por e_d, es dada por

$$e_d = \left(\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}\right) \frac{p}{q} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = D'(p) \cdot \frac{p}{q}$$

Ejemplo 52. Si la ecuación de demanda es $q = 500 - 10p$, halle la elasticidad de la demanda y calcule dicha elasticidad cuando $p = 2$.

Solución

Como $e_d = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$ y $\frac{dq}{dp} = -10$, entonces $e_d = -\frac{10p}{q}$

Para $p = 2$, se tiene que $q = 480$ y la elasticidad en este punto es $e_d = -1/24$.

Definición 7

a) Se dice que la demanda es **elástica** en el punto $(p; q)$ si $|e_d| > 1$.

b) Se dice que la demanda es **inelástica** en el punto $(p; q)$ si $|e_d| < 1$.

c) Se dice que la demanda tiene **elasticidad unitaria** en el punto $(p; q)$ si $|e_d| = 1$.

Observación 6

Si $|e_d| > 1$ (demanda elástica), significa que ante una variación porcentual en el precio, será mayor la variación porcentual en la cantidad demandada.

Si $|e_d| < 1$ (demanda inelástica), significa que ante una variación porcentual en el precio, será menor la variación porcentual en la cantidad demandada.

Si $|e_d| = 1$ (elasticidad unitaria), significa que ante una variación porcentual en el precio, la variación porcentual en la cantidad demandada es casi la misma.

En el ejemplo 52, la curva es inelástica en el punto $(2; 480)$ y en el punto $(30; 200)$ la curva es elástica ($e_d = -1{,}5$). Por consiguiente, aunque la curva de demanda sea una recta, la elasticidad no es constante.

7.9.2 UTILIDAD MÁXIMA

Como es natural, el objetivo básico de cualquier empresa es maximizar su utilidad total (lucro total) o minimizar la pérdida.

El punto importante para la empresa es el punto donde la utilidad es máxima, y esto ocurre cuando el costo marginal es igual al ingreso marginal.

Si designamos con U el lucro (ganancia o utilidad total), entonces

$$U(x) = I(x) - C(x) \qquad \text{(Ingreso – Costo)}$$

Para maximizar la utilidad, se debe cumplir que $U'(x) = 0$ y $U''(x) < 0$.

$(U'(x) = 0 \Leftrightarrow I'(x) - C'(x) = 0 \Leftrightarrow I'(x) = C'(x))$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 53. Supongamos que tenemos competición pura y que el precio p es constante e igual a 100. El ingreso total de la firma es $I = 100x$, donde x es la cantidad vendida. Supongamos que el costo es $C = 2x^3 - 12x^2 + 28x + 40$, entonces

$$U = 100x - 2x^3 + 12x^2 - 28x - 40 = 72x - 2x^3 + 12x^2 - 40$$
$$U' = 72 + 24x - 6x^2 = -6(x-6)(x+2)$$
$$U' = 0 \Rightarrow x = 6.$$

Como $U'' = 24 - 12x$ y $U''(6) = -48 < 0$, se concluye que $x = 6$ maximiza la utilidad y la utilidad máxima es 392.

Ejemplo 54. Consideremos ahora el caso de un monopolio, esto es, cuando el precio del mercado no es constante (puede ser alterado por el monopolista). Supongamos que el costo total es $C = 0{,}25x^2 + 35x + 25$ y $p = 50 - 0{,}5x$, entonces,

$$U(x) = (50 - 0{,}5x)x - (0{,}25x^2 + 35x + 25) = -0{,}75x^2 + 15x - 25$$
$$U'(x) = -1{,}5x + 15 \text{ y } U'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

Esta cantidad maximiza U, pues $U''(10) = -1{,}5 < 0$.

Luego, la cantidad que maximiza a la utilidad es $x = 10$ y la ganancia máxima es $U = 50$.

EJERCICIOS

1) Si la función de costo total es $C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$, determine el costo promedio y el costo marginal.

2) Si la función de demanda es $q = \dfrac{500}{p+10} - 30$, determine el ingreso total y el ingreso marginal.

3) Calcule la elasticidad de la demanda, si la función de demanda es $q = \dfrac{10-p}{5}$ cuando $p = 5$ y cuando $p = 3$.

4) **Elasticidad de demanda constante**. Consideremos la función de demanda de la forma $q = \dfrac{k}{p^\alpha}$, donde k y α son constantes positivas. Demuestre que la elasticidad de la demanda es constante en todos los puntos y calcule e_d para el caso especial de $k = 200$ y $\alpha = 3$. Interprete para $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ y $\alpha < 1$.

5) Si la demanda es $q = 200 - 10p$ y el costo promedio es $C_m = 5 + \dfrac{q}{50}$ determine la función de utilidad, el costo marginal y el ingreso marginal.

6) Dada la función de costo total $C_t = 100 + 8x + 0{,}006x^2$, determine el costo marginal, el costo medio, el punto de intersección de las dos curvas, y muestre que éste coincide con el punto de mínimo de la función costo promedio C_m.

7) El costo total de un monopolista es $C_t = 0{,}1x^2 + 5x + 200$ y el precio de venta de una pieza es $p = 10 - 0{,}05x$, siendo x la producción diaria. Determine el valor de x que maximiza la ganancia.

8) Calcule la utilidad máxima de un monopolista cuya función de costo es $C_t = 0{,}5x^2 + 20x + 15$ y el precio de venta de cada unidad es $p = 30 - x$, donde x es la cantidad de productos.

9) La firma XX opera bajo libre competencia y el precio de venta de un producto es $p = 50$. Si su función de costo total es $C_t = 100 + 3x + 0{,}5x^2$, determine la utilidad máxima de de la firma.

10) La función de costo total de la firma YZ es $0{,}2x^2 + 6x + 100$, donde x es dado en kg. Determine la función de costo medio y el valor de x para el cual el costo medio es mínimo.

11) En competencia perfecta, la firma XX puede vender toda su producción de una cierta mercancía a un precio de S/. 100 la unidad. Si a diario producen x unidades, el costo total de la producción diaria es $x^2 + 20x + 700$ soles. Halle el número de unidades que deberán producirse diariamente para que la firma obtenga la máxima utilidad total diaria.

12) En situación de monopolio, la ecuación de demanda de un artículo es $p = 6 - 0{,}2\sqrt{x - 100}$, donde p dólares es el precio por artículo cuando se demandan x artículos. Además, se sabe que $x \in [100; 1000]$. Si el costo total de la producción es $C(x) = 2x + 100$ (dólares), halle las funciones ingreso marginal y costo marginal, y calcule el valor de x que maximiza la utilidad.

13) El costo fijo de un fabricante de juguetes es de 400 dólares por semana y los otros costos llegan a los 3 dólares por cada juguete producido. Halle el costo total, el costo promedio, el costo marginal, y determine el menor número de juguetes que deben producirse a fin de que el costo promedio por juguete sea menor que 3,42 dólares.

www.FreeLibros.com

7.10 MÉTODO DE NEWTON PARA DETERMINAR LAS RAÍCES REALES DE $f(x) = 0$

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$, donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable. Las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ son las intersecciones de la gráfica de $y = f(x)$ con el eje x.

Sea α una raíz real desconocida de $f(x) = 0$. Si podemos encontrar una aproximación x_1 para α, una mejor aproximación para α está dada por la intersección x_2 de la tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_1; f(x_1))$ con el eje x (Fig. 7.44).

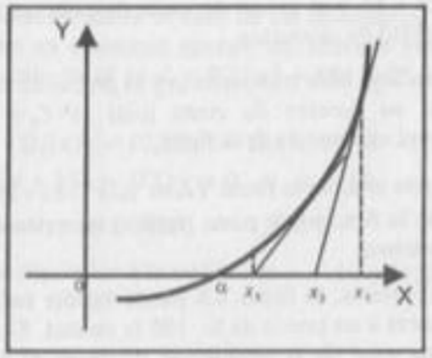


Fig. 7.44

Puesto que x_2 es también una aproximación para α, entonces la tangente a $y = f(x)$ en $(x_2; f(x_2))$ corta al eje x en x_3, y es una mejor aproximación para α (Fig. 7.51). Aplicando este método un número suficiente de veces, la raíz α de $f(x) = 0$ se puede calcular con tantas cifras decimales exactas como se desee. Este método se debe a Isaac Newton y es conocido también como el **método de las tangentes**.

Sea x_1 una primera aproximación para una raíz α de $f(x) = 0$. La tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_1; f(x_1))$ es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

La intersección x_2 con el eje x se encuentra haciendo $y = 0$ en la ecuación anterior. Resolviendo para x, se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Aplicando el mismo método, la siguiente aproximación x_3 es la intersección de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_2, f(x_2))$, y está dada por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Y así sucesivamente, la n-ésima aproximación está dada por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

donde n es cualquier entero positivo mayor que 1.

Ejemplo 55. Aproxime la raíz real de la ecuación $2x^3 - x^2 + x - 3 = 0$.

Solución

Sea $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$. Puesto que $f(1) = -1$, $f(2) = 11$ y f es continua entre 1 y 2, existe una raíz real $\alpha \in \langle 1; 2\rangle$ de $3x^3 - x^2 + x - 3 = 0$.

Si $x_1 = 1$ es una primera aproximación de α, considerando que $f'(1) = 5$, se tiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{(-1)}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Análogamente, como $f'(1{,}2) = 7{,}24$ y $f(1{,}2) = 0{,}216$, tenemos

$$x_3 = 1{,}2 - \frac{0{,}216}{7{,}24} = 1{,}1701$$

Observación 7

Para determinar una aproximación de una raíz real α de la ecuación $f(x) = 0$, se debe tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1) *Determinar un intervalo $[a; b]$ de modo que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos diferentes, ya que, por la continuidad de f, entre a y b existe por lo menos una raíz real. El intervalo $[a; b]$, en lo posible, debe ser el más pequeño posible.*

2) *Al tomar a ó b como una primera aproximación a la raíz α comprendida en $[a; b]$, puede suceder que la tangente corte al eje x en un punto que se encuentra fuera del intervalo $[a; b]$, por lo que la tangente debe ser trazada en aquel extremo del arco donde coinciden los signos de la función y de su segunda derivada.*

3) *Se debe evitar que dentro de $[a; b]$ exista un punto de inflexión. Su existencia puede hacer que la intersección de la tangente con el eje x esté fuera de $[a; b]$.*

www.FreeLibros.com

Ejemplo 56. Encuentre la raíz real de $2x^3 - 15x^2 + 24x - 20 = 0$, con una aproximación de tres cifras decimales exactas.

Solución

Teniendo en cuenta las recomendaciones dadas en la observación anterior y que la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 20$ (Fig. 7.45), la única raíz real α está en el intervalo $[5; 6]$, pues $f(5) = -25$ y $f(6) = 16$.

Escogemos como primera aproximación a $x_1 = 6$. Como $f'(6) = 60$, entonces

$$x_2 = 6 - \frac{16}{60} = 5{,}733..$$

La raíz está en el intervalo $[5{,}7; 5{,}73]$, pues $f(5{,}7) = -0{,}1..$ y $f(5{,}73) = 1{,}2..$. Considerando como una segunda aproximación a $x_2 = 5{,}73$ y aplicando la fórmula, se obtiene

$$x_3 = 5{,}73 - \frac{f(5{,}73)}{f'(5{,}73)} = 5{,}7036..$$

Teniendo en cuenta que la raíz está entre $[5{,}703; 5{,}7036]$ porque $f(5{,}703) = -0{,}020015..$ y $f(5{,}7036) = 0{,}000825..$, la raíz con una aproximación de 3 cifras decimales es $\alpha = 5{,}703$

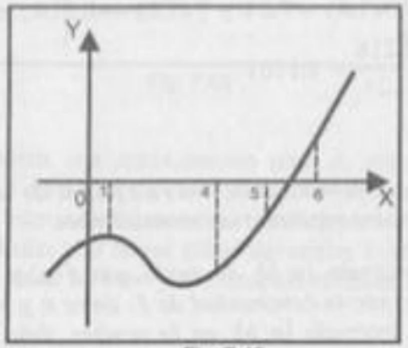


Fig. 7.45

EJERCICIOS

Calcule las raíces reales de las siguientes ecuaciones, con 3 cifras decimales exactas.

1) $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$, comprendida en $[0; 1]$

2) $x^5 - x - 0{,}2 = 0$, comprendida en $[1; 1{,}1]$

3) $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$, comprendida en $[1; 2]$

4) $x^3 - 4x + 2 = 0$, comprendida en $[-3; 2]$

8 FUNCIONES TRASCENDENTES

En este capítulo estudiaremos algunas funciones no algebraicas a las que se les denominan funciones trascendentes. Entre ellas se consideran a las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas.

8.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

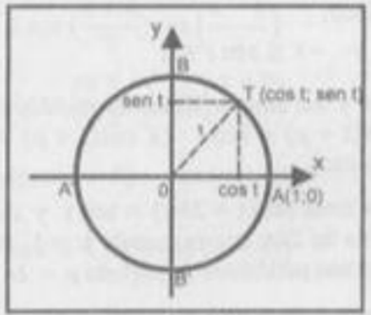


Fig. 8.1

En el plano xoy, consideremos la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen de coordenadas. La ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

Sea $A(1; 0)$ el punto de la circunferencia que será fijado como origen de los arcos orientados $\widehat{AT}$ sobre la circunferencia. Esta orientación es positiva si a partir de A se recorre en el sentido antihorario y es negativa si a partir de A se recorre en el sentido horario.

Establecemos una correspondencia entre los números reales y los puntos de la circunferencia del modo siguiente:

Al número real t le corresponde el punto T de la circunferencia de modo que el arco orientado $\widehat{AT}$ mide $|t|$ unidades. Si t es positivo, el arco tiene orientación positiva y si t es negativo, el arco tiene orientación negativa.

Si $T(x; y)$ es el punto que le corresponde al número real t, la abscisa x se llama coseno de t ($\cos t$) y la ordenada y se denomina seno de t ($\text{sen}\, t$) (Fig. 8.1) y se escribe:

$$x = \cos t\,,\ \ y = \text{sen}\, t \quad ó \quad T(\cos t; \text{sen}\, t)$$

www.FreeLibros.com

Por ejemplo, considerando que la longitud de la circunferencia es 2π, al número $\pi/2$ le corresponde el punto $B(0;1)$. Entonces

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ , \ \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$$

Asimismo, a los números π y 3π les corresponde el punto $C(-1;0)$. Entonces

$$\cos\pi = \cos 3\pi = -1 \ \text{ y } \ \text{sen}\ \pi = \text{sen}\ 3\pi = 0$$

De esta correspondencia se deducen las siguientes propiedades:

1) Como $T(\cos t; \text{sen}\ t)$ es un punto de la circunferencia, se tiene la relación fundamental

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

2) Considerando que T varía sobre la circunferencia, su abscisa y su ordenada varían de -1 a 1, es decir:

$$-1 \le \cos t \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \text{sen}\ t \le 1$$

3) **Periodicidad del seno y del coseno**. El menor número real positivo p para el cual se verifica $\text{sen}(t+p) = \text{sen}\ t$ (ó $\cos(t+p) = \cos t$) se denomina período de seno (ó coseno).

Si $p = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, se tiene $\text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}\ t$ y $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$. El menor valor positivo de $2k\pi$ ocurre cuando $k = 1$. Por tanto, se concluye que el seno y el coseno son periódicos de período $p = 2\pi$.

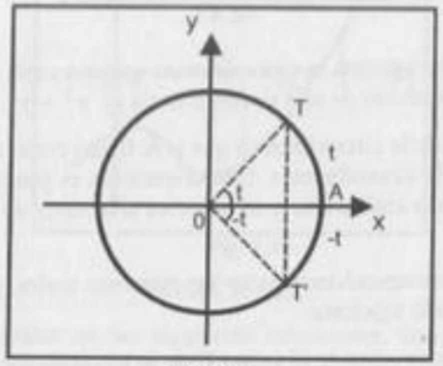


Fig. 8.2

4) A los números reales t y $-t$ les corresponde los puntos T y T', respectivamente. Estos puntos son simétricos respecto al eje x (Fig. 8.2) y tienen la misma abscisa, pero sus ordenadas difieren en un signo. Entonces

$$\cos(-t) = \cos t$$
$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}\ t.$$

www.FreeLibros.com

5) Otras propiedades (identidades trigonométricas) son:

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\ a \cos b \pm \text{sen}\ b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{ó} \quad 1 + \cos b = 2\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{sen}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad \text{ó} \quad 1 - \cos b = 2\text{sen}^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{sen}\ a + \text{sen}\ b = 2\ \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{sen}\ a - \text{sen}\ b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos b - \cos a = 2\ \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{sen}\ a\ \text{sen}\ b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{sen}\ a \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se definen $\tan x$ (tangente de x), $\cot x$ (cotangente de x), $\sec x$ (secante de x) y $\csc x$ (cosecante de x) como:

a) $\tan x = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x}$, si $\cos x \neq 0$, es decir, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x}$, si $\text{sen}\ x \neq 0$, es decir, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, si $\cos x \neq 0$, es decir, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\ x}$, si $\text{sen}\ x \neq 0$, es decir, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Mencionamos 3 propiedades básicas entre estas relaciones.

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$|\sec x| \ge 1 \ , \ \ |\csc x| \ge 1$$

8.1.1 FUNCIÓN SENO

Se denomina función seno a la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Algunas características de la función seno

a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1;1]$

b) La función seno es periódica de periodo $p = 2\pi$. En general, la función $g(x) = A\operatorname{sen}(mx+n), m \neq 0$ es periódica de periodo $p = 2\pi/|m|$.

c) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, es decir, la función seno es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen (Fig. 8.3).

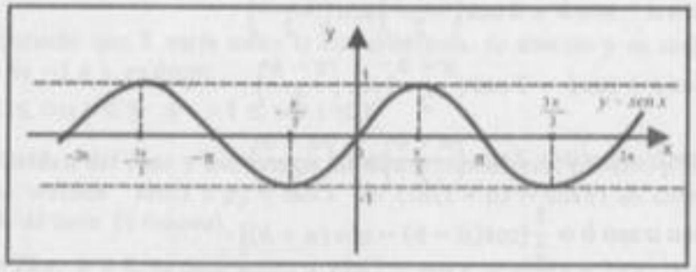


Fig. 8.3

8.1.2 FUNCIÓN COSENO

Se llama función coseno a la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \cos x$$

Algunas características de la función coseno

a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1;1]$

b) La función coseno es periódica de periodo $p = 2\pi$. En general, la función $g(x) = A\cos(mx+n), m \neq 0$ es periódica de periodo $p = 2\pi/|m|$.

c) $\cos(-x) = \cos x$, esto es, la función coseno es par y su gráfica es simétrica respecto al eje y (Fig. 8.4).

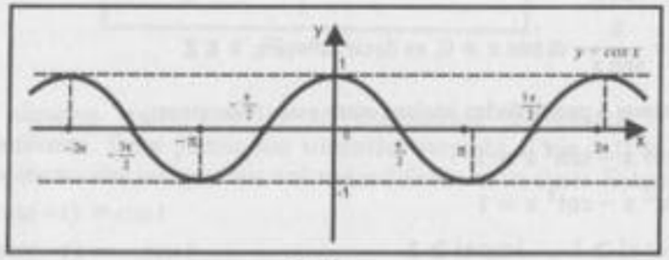


Fig. 8.4

d) Puesto que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$, la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ se convierte en la gráfica de $y = \cos x$ si el origen se desplaza al punto $(\pi/2;0)$.

e) En la siguiente tabla se presentan ciertas características importantes de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces:

Función	Valor 0 en	Valor máx. 1 en	Valor mín. −1 en
$\operatorname{sen} x$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\cos x$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = 2k\pi$	$x = \pi + 2k\pi$

8.1.3 FUNCIÓN TANGENTE

La función tangente está definida como

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Algunas características de la función tangente

a) $D_f = \mathbb{R} - \{x \,/\, \cos x = 0\} = \mathbb{R} - \left\{x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $R_f = \mathbb{R}$

b) La función tangente es periódica de periodo $p = \pi$. En general, la función $g(x) = B\tan(mx+n)$, $m \neq 0$, es periódica de periodo $p = \pi/|m|$.

c) Sus asíntotas verticales son las rectas $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que son las soluciones de la ecuación $\cos x = 0$.

d) $\tan(-x) = -\tan x$, esto es, la función tangente es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen (Fig. 8.5).

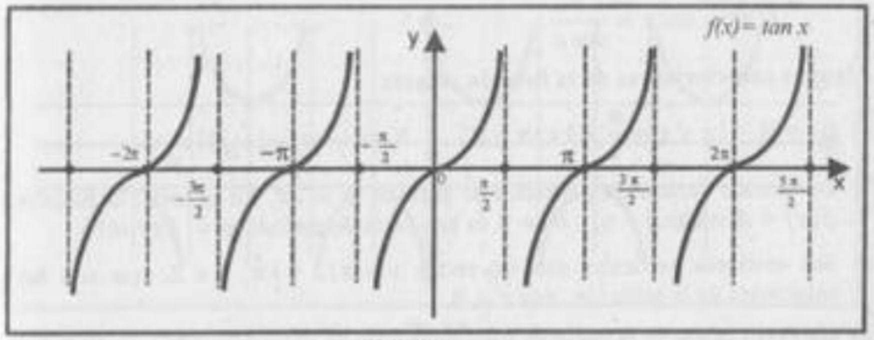


Fig. 8.5

www.FreeLibros.com

8.1.4 FUNCIÓN COTANGENTE

La función cotangente está definida como

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Algunas características de la función cotangente

a) $D_f = \mathbb{R} - \{x \;/\; \operatorname{sen} x = 0\} = \mathbb{R} - \{x \;/\; x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $R_f = \mathbb{R}$

b) La función cotangente es periódica de período $p = \pi$. En general, la función $g(x) = B\cot(mx + n)$, $m \neq 0$, es periódica de período $p = \pi/|m|$.

c) Sus asíntotas verticales son las rectas verticales $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que resultan al resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$.

d) $\cot(-x) = -\cot x$, $\forall x \neq k\pi$, es decir, la función cotangente es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen (Fig. 8.6).

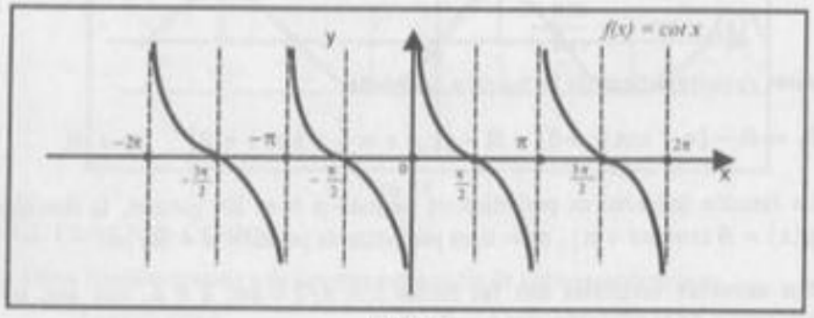


Fig. 8.6

8.1.5 FUNCIÓN SECANTE

Se denomina función secante a la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Algunas características de la función secante

a) $D_f = \mathbb{R} - \left\{x \;/\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $R_f = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

b) La función secante es periódica de período $p = 2\pi$. En general, la función $g(x) = A\sec(mx + n)$, $m \neq 0$, es periódica de período $p = 2\pi/|m|$.

c) Sus asíntotas verticales son las rectas $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que son las soluciones de la ecuación $\cos x = 0$.

d) $\sec(-x) = \sec x$, es decir, la función secante es par y su gráfica es simétrica respecto al eje y (Fig. 8.7).

www.FreeLibros.com

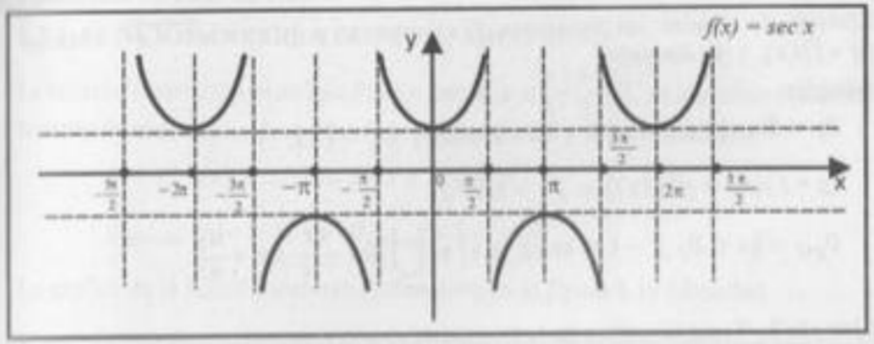


Fig. 8.7

8.1.6 FUNCIÓN COSECANTE

La función cosecante está definida como

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Algunas características de la función cosecante

a) $D_f = \mathbb{R} - \{x \;/\; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $R_f = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

b) La función cosecante es periódica de período $p = 2\pi$. En general, la función $g(x) = B\csc(mx + n)$, $m \neq 0$, es periódica de período $p = 2\pi/|m|$.

c) Sus asíntotas verticales son las rectas verticales $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que resultan al resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$.

d) $\csc(-x) = -\csc x$, esto es, la función cosecante es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen (Fig. 8.8).

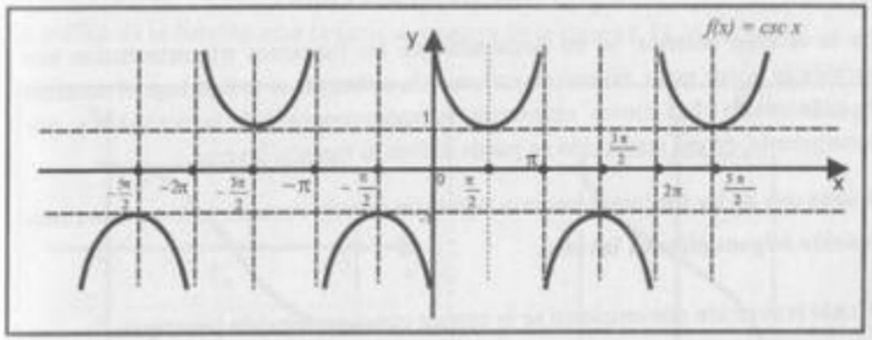


Fig. 8.8

Ejemplo 1. Dadas las funciones $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, obtenga $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

Solución

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \,/\, x = \pi/2 + k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\} \;,\; D_g = [-1; 1]$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - \tan^2 x}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \;/\; -1 \le \tan x \le 1\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$$

Ejemplo 2. Trace la gráfica de la función $f(x) = 2 \text{ sen } |2x|$.

Solución

La gráfica de esta función (Fig. 8.9) es simétrica respecto al eje y.

Para trazar su gráfica , se observa que para $x > 0$, el periodo es $p = 2\pi/2 = \pi$.

x	$f(x)$
0	0
$\pi/4$	2
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	-2
π	0
$5\pi/4$	2
$3\pi/2$	0

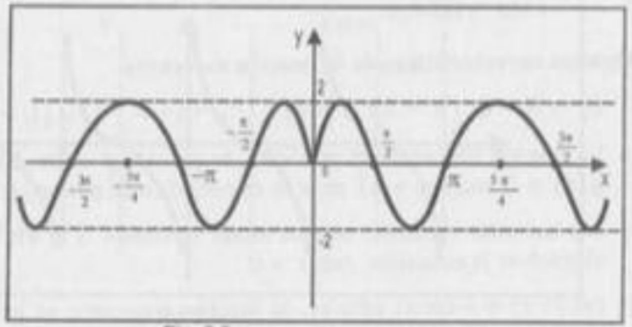


Fig. 8.9

8.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En la sección anterior, se ha destacado que las funciones trigonométricas son periódicas y, por tanto, no son inyectivas. Sin embargo, si se restringe el dominio de cada una de ellas conver 'entemente, se puede conseguir la inyectividad y, por consiguiente, en esa restricción se puede definir la función inversa.

A cada una de las funciones inversas obtenidas de esta manera, se le conoce como **función trigonométrica inversa**.

A cada restricción convencional se le conoce como **restricción principal**.

www.FreeLibros.com

8.2.1 FUNCIÓN INVERSA DE SENO: ARCO SENO

La función restricción principal $F(x) = \text{sen } x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, es inyectiva y admite función inversa que se denomina **función arco seno** y está definida por

$$y = F^{-1}(x) = \text{arcsen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y$$

$$D_{\text{arcsen}} = [-1; 1] \;\text{ y }\; R_{\text{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

La gráfica de la función arco seno se muestra en la figura 8.10 (derecha).

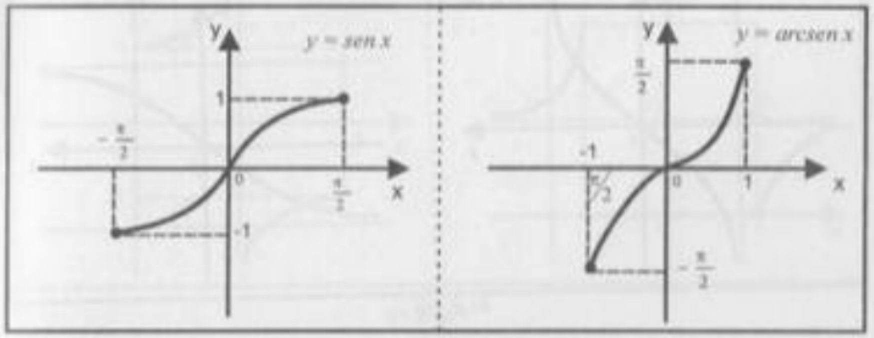


Fig. 8.10

8.2.2 FUNCIÓN INVERSA DE COSENO: ARCO COSENO

La función restricción principal $F(x) = \cos x,\ x \in [0; \pi]$, es inyectiva y tiene función inversa que se llama **función arco coseno**, la cual está definida por

$$y = F^{-1}(x) = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$D_{\arccos} = [-1; 1] \;\text{ y }\; R_{\arccos} = [0; \pi]$$

La gráfica de la función arco coseno se muestra en la figura 8.11 (derecha).

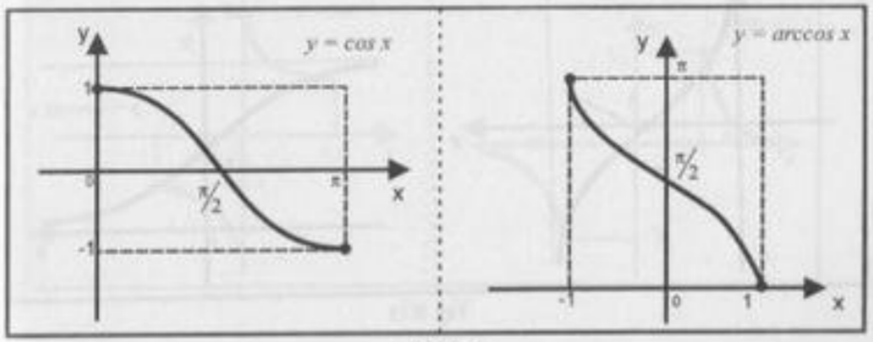


Fig. 8.11

8.2.3 FUNCIÓN INVERSA DE TANGENTE: ARCO TANGENTE

La función restricción principal $y = F(x) = \tan x,\ x \in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$, es inyectiva y tiene función inversa que se denomina **función arco tangente** y se define por

$$y = F^{-1}(x) = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$D_{\arctan} = \mathbb{R} \quad y \quad R_{\arctan} = \langle -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \rangle$$

La gráfica de la función arco tangente se muestra en la Fig. 8.12 (derecha).

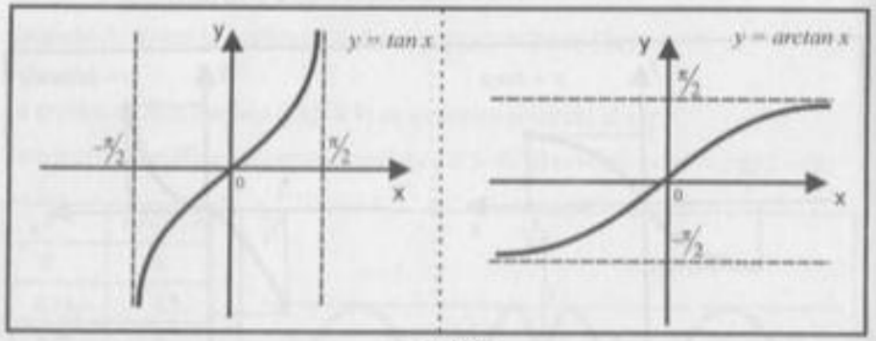


Fig. 8.12

8.2.4 FUNCIÓN INVERSA DE COTANGENTE: ARCO COTANGENTE

La función restricción principal $y = F(x) = \cot x,\ x \in \langle 0; \pi \rangle$, es inyectiva y tiene función inversa que se denomina **función arco cotangente** y se define como

$$y = F^{-1}(x) = \operatorname{arcot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$D_{\operatorname{arccot}} = \mathbb{R} \quad y \quad R_{\operatorname{arccot}} = \langle 0; \pi \rangle$$

La gráfica de la función arco cotangente se muestra en la figura 8.13 (derecha).

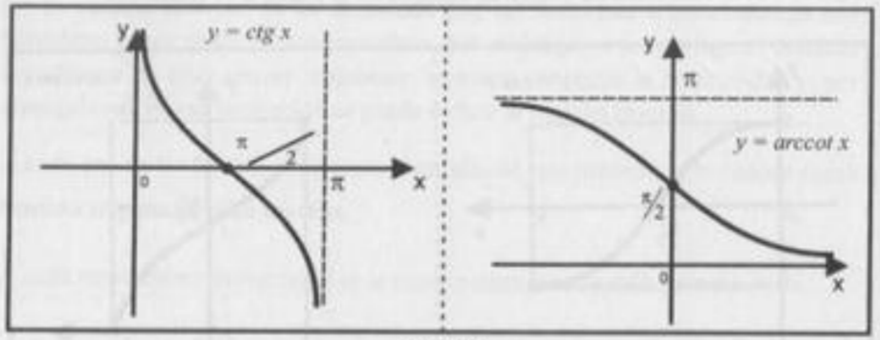


Fig. 8.13

8.2.5 FUNCIÓN INVERSA DE SECANTE: ARCO SECANTE

La función restricción principal $y = F(x) = \sec x,\ x \in [0; \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2; \pi]$ es inyectiva y tiene función inversa que se denomina **función arco secante**, la cual está definida por

$$y = F^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow x = \sec y$$

$$D_{\operatorname{arcsec}} = \langle -\infty; 1] \cup [1; +\infty\rangle \quad y \quad R_{\operatorname{arcsec}} = [0; \frac{\pi}{2}\rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}; \pi]$$

La gráfica de la función arco secante se muestra en la Fig. 8.14 (derecha).

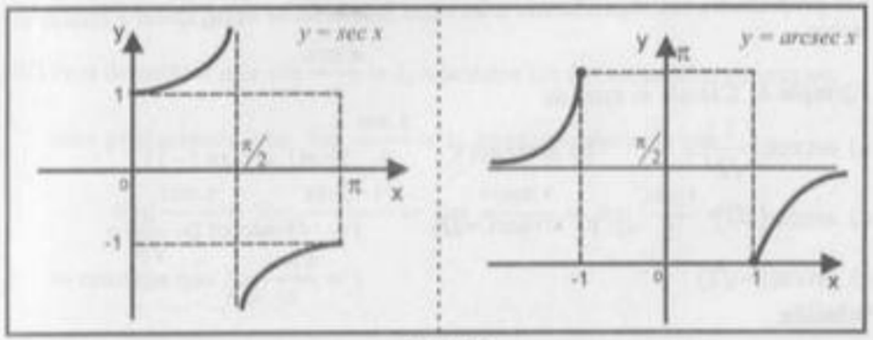


Fig. 8.14

8.2.6 FUNCIÓN INVERSA DE COSECANTE: ARCO COSECANTE

La función restricción principal $y = F(x) = \csc x,\ x \in [-\pi/2; 0\rangle \cup \langle 0; \pi/2]$, es inyectiva y tiene función inversa que se denomina **función arco cosecante** y está definida como

$$y = F^{-1}(x) = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow x = \csc y$$

$$D_{\operatorname{arccsc}} = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle \quad y \quad R_{\operatorname{arccsc}} = [-\frac{\pi}{2}; 0\rangle \cup \langle 0; \frac{\pi}{2}]$$

La gráfica de la función arco cosecante se muestra en la figura 8.15 (derecha).

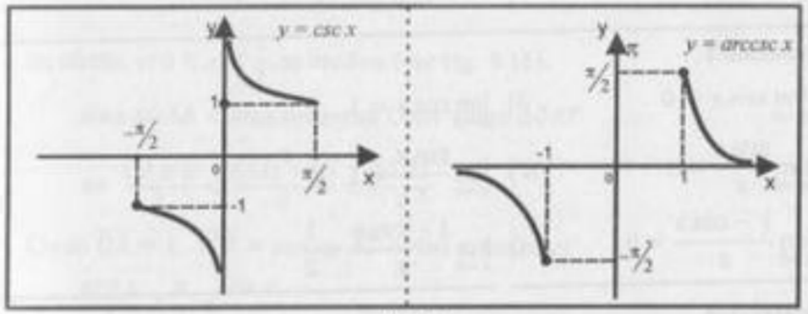


Fig. 8.15

www.FreeLibros.com

8.2.7 PROPIEDADES

Las principales propiedades de las funciones trigonométricas inversas son

1) a) $\text{arcsen}(\text{sen}\,x) = x\,,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) $\text{sen}(\text{arcsen}\,x) = x\,,\ \forall x \in [-1;1]$

2) a) $\arccos(\cos x) = x\,,\ \forall x \in [0;\pi]$

b) $\cos(\arccos x) = x\,,\ \forall x \in [-1;1]$

Las propiedades correspondientes a las otras funciones se dejan como ejercicio al lector.

Ejemplo 3. Calcule el valor de

a) $\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\arctan(1)$ c) $\arctan(-1)$

d) $\text{arccsc}(\sqrt{2})$ e) $\text{arcsec}(-2)$ f) $\text{arccot}\,(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

g) $\text{arccsc}(-\sqrt{2})$

Solución

a) Sea $y = \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, entonces $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \wedge \text{sen}\,y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, $y = \frac{\pi}{4}$.

b) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ c) $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ d) $\text{arccsc}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

e) $\text{arcsec}(-2) = \frac{2\pi}{3}$ f) $\text{arccot}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ g) $\text{arccsc}(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$

8.3 LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

Para el cálculo de los límites trigonométricos, se requiere establecer algunos límites básicos. Estos se mencionan en la siguiente proposición.

Proposición 1

i) $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\,x = 0$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$

Demostración

www.FreeLibros.com

i) Sea $\varepsilon > 0$. De la (Fig. 8.16) se tiene que $|\text{sen}\,x| < |x|$

Ahora, para todo $x \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle - \{0\}$ se sabe que $|x| < \frac{\pi}{2}$. Luego, tomando $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\pi}{2};\varepsilon\right\}$ resulta que si $0 < |x| < \delta$, entonces

$$|\text{sen}\,x - 0| = |\text{sen}\,x| < |x| < \delta \le \varepsilon$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\,x = 0$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1$

iii) Para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$, usaremos los dos resultados anteriores.

Solo probaremos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$, pues considerando que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,x}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\text{sen}(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\text{sen}\,t}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\text{sen}\,t}{t} = 1$$

se concluye que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$.

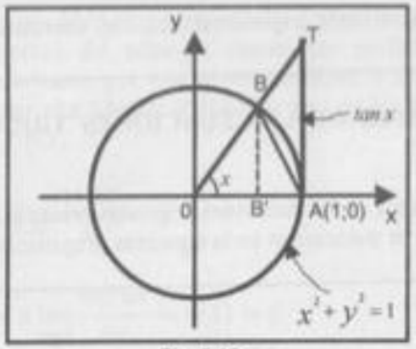


Fig. 8.16

En efecto, si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, se verifica (ver Fig. 8.16):

área ΔOAB < área del sector OAB < área ΔOAT

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{OA}\cdot\overline{B'B}}{2} < \frac{(\overline{OA})^2\cdot\widehat{AB}}{2} < \frac{\overline{OA}\cdot\overline{AT}}{2}$$

Como $\overline{OA} = 1$, $\overline{B'B} = \text{sen}\,x$, $\overline{AT} = \tan x$, entonces

$$\frac{\text{sen}\,x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Multiplicando ambos términos de esta expresión por $\dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$, se tiene

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ de donde, } \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$, se sigue que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

(Teorema del sándwich)

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)}$ (multiplicando y dividiendo por $1 + \cos x$)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}$

> **Proposición 2** Las funciones trigonométricas son continuas en sus dominios respectivos.

8.4 ALGUNOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En el cálculo de los límites de las funciones trigonométricas inversas es necesario recordar los límites que se mencionan en la siguiente proposición.

> **Proposición 3**
>
> a) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arcsen} x = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$
>
> c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$
>
> e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

Demostración

Solo se demostrará a). Lo demás se deja como ejercicio para el lector.

a) Sea $t = \operatorname{arcsen} x$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, entonces $x = \operatorname{sen} t$.

Si $x \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t \to 0$, de donde $t \to 0$.

Luego, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arcsen} x = \lim\limits_{t \to 0} t = 0$.

www.FreeLibros.com

> **Proposición 4** Las funciones trigonométricas inversas son continuas en sus dominios correspondientes.

Demostración. (Ejercicio para el lector)

Ejemplo 4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\left(\sec\frac{\pi x}{2}\right) - 2x\right]$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{arcsen}(x - \frac{1}{2})}{\arctan x}$

Solución

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (por la continuidad de la función seno)

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\left(\sec\dfrac{\pi x}{2}\right) - 2x\right] = \sec \pi - 4 = -1 - 4 = -5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\arctan x} = \dfrac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}{\arctan 1} = \dfrac{\pi/6}{\pi/4} = \dfrac{2}{3}$

En cada uno de estos ejemplos, al calcular el límite, lo hemos evaluado directamente, pues las funciones son continuas en dichos puntos.

En lo que sigue, daremos ejemplos para calcular límites de la forma 0/0 (salvo que se indique lo contrario). En ellos se usaran los artificios de multiplicar el numerador y el denominador por una misma cantidad o utilizar alguna identidad trigonométrica que permita adaptar el límite a uno de los límites establecidos en las proposiciones 1, 2 ó 3.

Ejemplo 5. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{x}$.

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{x} = 6 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{6x} = 6(1) = 6$$

(En el segundo límite se ha aplicado la propiedad $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$)

Ejemplo 6. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax.\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}}{bx.\dfrac{\operatorname{sen} bx}{bx}} = \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}}{\dfrac{\operatorname{sen} bx}{bx}} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 7. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\operatorname{sen}4x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}3x)}$.

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen}4x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{16\dfrac{\operatorname{sen}^2 4x}{(4x)^2}\left[\dfrac{1-\cos(\operatorname{sen}4x)}{\operatorname{sen}^2 4x}\right]}{9\dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{(3x)^2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}3x)}{\operatorname{sen}3x}\right]^2}=\frac{16(1)^2\left(\frac{1}{2}\right)}{9(1)^2(1)^2}=\frac{8}{9}$$

Ejemplo 8. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\operatorname{sen}2x)}{x^2}$.

Solución

Sumando y restando 1 en el numerador, este límite lo separamos en dos límites de la forma 0/0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{sen}2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-\cos(\operatorname{sen}2x)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{4\operatorname{sen}^2 2x}{(2x)^2}\cdot\left[\frac{1-\cos(\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}\right]\right\}=-\frac{1}{2}+4(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

Ejemplo 9. Calcule $L=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}7x-\operatorname{sen}3x}{x\cos x}$.

Solución

Separando el límite en dos límites, se obtiene

$$L=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}7x}{x\cos x}-\frac{\operatorname{sen}3x}{x\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[7\frac{\operatorname{sen}7x}{7x}-3\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\right]\cdot\frac{1}{\cos x}=(7-3).1=4$$

Ejemplo 10. Calcule $\lim_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{3-x}$.

Solución

En este límite se hace el cambio de variable $y=x-3$, de modo que la nueva variable $y\to 0$. Enseguida, se utilizan las identidades trigonométricas.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{3-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi(y+3)}{-y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi y+3\pi)}{-y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi y\cos 3\pi+\cos\pi y\operatorname{sen}3\pi}{-y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi y}{y}=\pi\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi y}{\pi y}=\pi$$

En general, si en un límite trigonométrico la variable $x\to a$, el cambio de variable $y=x-a$ transforma al límite donde la nueva variable $y\to 0$.

Ejemplo 11. Calcule $L=\lim_{x\to 5}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-10x+25)}{x^3+5x^2-125x+375}$.

Solución

Factorizando $(x-5)$ en el numerador y denominador, y luego haciendo el cambio de variable $y=x-5$, se tiene

$$L=\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2}\cdot\frac{1}{(x+15)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y^2}{y^2}\cdot\frac{1}{y+20}=\frac{1}{20}$$

Ejemplo 12. Calcule $\lim_{n\to+\infty}n\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$.

Solución

Este límite es de la forma $\infty\cdot 0$. Transformando el límite a la forma 0/0 y aplicando la propiedad iii) de la proposición 1, se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty}n\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)=x\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)}=x(1)=x$$

Ejemplo 13. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x-\operatorname{sen}x}{x}$.

Solución

El límite es de la forma ∞/∞. De manera análoga al ejemplo 9, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x-\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan x-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right]=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\quad(*)$$

$(*)\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x=0.\ \left(\dfrac{1}{x}\text{ tiende a 0 y }\operatorname{sen}x\text{ es acotada}\right)$

Ejemplo 14. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{18x^2}{1-\sqrt{\cos(\pi x)}}$.

Solución

El límite es de la forma 0/0. Para simplificar el cociente, multiplicamos numerador y denominador por $1+\sqrt{\cos(\pi x)}$. Luego, usando argumentos similares a los de los ejemplos anteriores, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{18x^2}{1-\sqrt{\cos(\pi x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{18x^2(1+\sqrt{\cos\pi x})}{1-\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{18(1+\sqrt{\cos\pi x})}{\dfrac{\pi^2(1-\cos\pi x)}{(\pi x)^2}}=\frac{18(2)}{\pi^2\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{72}{\pi^2}$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 15 Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{\text{arcsen}\,(x-2)}{x^2 - 2x}$

Solución

Este límite es de la forma 0/0. Aplicando estrategias similares a las de los ejemplos anteriores, nos queda

$$\lim_{x \to 2} \frac{\text{arcsen}\,(x-2)}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{\text{arcsen}(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad (\text{pues } x - 2 \to 0)$$

Ejemplo 16 Calcule $L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{arcsen}(3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x - \cot x}}$

Solución

Aplicando argumentos similares a los ejemplos anteriores, se tiene

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{arcsen}\,3x}{x} \cdot \sqrt{\frac{\tan x}{\csc x - \cot x}} = \lim_{x \to 0^+} 3\frac{\text{arcsen}\,3x}{3x} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x(1-\cos x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 3\frac{\text{arcsen}\,3x}{3x} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}}{\cos x\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}} = 3(1) \cdot \sqrt{\frac{(1)^2}{1\left(\frac{1}{2}\right)}} = 3\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

1) Si $f(x) = \text{sen}\,\frac{\pi x}{4} + \cos(\arctan x)$ y $g(x) = \sec(2-x) - \tan(\text{arcsec}(-x))$, calcule $f(1) + g(2)$. R. $1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$

2) Compruebe que:

a) $\text{arcsen}\, x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

En los ejercicios siguientes (del 3 al 10), esboce la gráfica de las siguientes funciones, si $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

3) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi[\![x]\!]}{2}\right)$ 4) $f(x) = \text{sen}(\pi[\![x]\!])$

5) $f(x) = 2\cos\frac{\pi x}{2}$ 6) $f(x) = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$

7) $f(x) = 2|\text{sen}\,|x||$ 8) $f(x) = \text{sen}\,|2x|$

9) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 10) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\, x$

Calcule los siguientes límites:

11) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \text{sen}\, x}{x^3}$ R. $\frac{1}{2}$ 12) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax - \tan^3 x}{\tan x}$ R. a

13) $\lim_{x \to 0} \frac{x\,\text{sen}(\text{sen}\,2x)}{1 - \cos(\text{sen}\,4x)}$ R. $\frac{1}{4}$ 14) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$ R. $\frac{9}{16}$

15) $\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{\text{sen}\,\pi x}$ R. $\frac{2}{\pi}$ 16) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ R. 1

17) $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{sen}(\pi - x)}{x(\pi - x)}$ R. $\frac{1}{\pi}$ 18) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$ R. $\frac{a^2}{2}$

19) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$ R. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 20) $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$ R. $\frac{\pi^2}{2}$

21) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 1}{\text{sen}(1 - x^2)}$ R. $\frac{3}{2}$ 22) $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$ R. -2

23) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2}x^2}{\tan x\sqrt{\sec x - 1}}$ R. 2 24) $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^4 - t^4\text{sen}^2 t}}{1 - \cos t}$ R. 2

25) $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\pi - 2t}$ R. $\frac{1}{2}$ 26) $\lim_{h \to 0} 4h\cot(4h)$ R. 1

27) $\lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos x}}$ R. 0 28) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}\right)$ R. $\frac{1}{2}$

29) $\lim_{n \to +\infty} n\tan\frac{x}{n}$ R. x 30) $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{\cos x} - \cos x}{x^2}$ R. $\frac{3}{4}$

31) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ R. 0 32) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ R. $\frac{1}{4}$

33) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ R. $\nexists$ 34) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}\, x + x}{x}$ R. $\frac{2\sqrt{2} + \pi}{\pi}$

35) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \text{sen}\, x)^3}{(1 + \cos 2x)^3}$ R. $\frac{1}{64}$ 36) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ R. $\sqrt{3}$

37) $\lim_{x \to +\infty} \frac{100\,\text{sen}\,3x + 200\cos x}{x}$ 38) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{arcsen}\,5x}{\arctan x}$ R. 5

39) $\lim_{x \to 0} \frac{\pi - 2\arccos x}{x}$ R. 2 40) $\lim_{x \to 0} \frac{2\tan x - \text{arcsen}\, x}{\text{sen}\, x}$ R. 1

www.FreeLibros.com

41) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi}{x}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ R. $\frac{\pi^2}{2}$

42) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2}$ R. $\frac{1}{4}$

43) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x)-1}$ R. -1

44) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^6}{(\tan x-\operatorname{sen} x)^2}$ R. 4

45) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$ R. 1

46) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{(1-\cos ax+x)(\sec ax)}$ R. a

47) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ R. $-\operatorname{sen} x$

48) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} ax}{x+\operatorname{sen} bx}$, $b\neq -1$ R. $\frac{1-a}{1+b}$

49) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3\operatorname{sen}\left[(x-2)^{5/3}\right]\arctan\left[(x-2)^{3/5}\right]\tan\left[(x-2)^{7/9}\right]}{2\operatorname{arcsen}\left[(x-2)^{73/45}\right](1-\cos\left[(x-2)^{7/3}\right])}$ R. $+\infty$

8.5 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Proposición 5. Las funciones trigonométricas son derivables en sus dominios respectivos. Se cumple:

a) $f(x)=\operatorname{sen} x$, entonces $f'(x)=\cos x$

b) $f(x)=\cos x$, entonces $f'(x)=-\operatorname{sen} x$

c) $f(x)=\tan x$, entonces $f'(x)=\sec^2 x$

d) $f(x)=\cot x$, entonces $f'(x)=-\csc^2 x$

e) $f(x)=\sec x$, entonces $f'(x)=\sec x\tan x$

f) $f(x)=\csc x$, entonces $f'(x)=-\csc x\cot x$

Demostración

a) Si $f(x)=\operatorname{sen} x$, por definición de la derivada, tenemos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-\operatorname{sen} x\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]$$

$$=-(\operatorname{sen} x)(0)+(\cos x)(1)=\cos x$$

www.FreeLibros.com

b) Si $f(x)=\cos x$, entonces

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-\cos x\frac{(1-\cos h)}{h}-\operatorname{sen} x\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]=-\operatorname{sen} x$$

c) Si $f(x)=\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, aplicando la derivada de un cociente para todo $x\in D_f$, se tiene

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

(d), (e) y (f) se dejan como ejercicio al lector.

Corolario. Si $u=u(x)$ es una función derivable, entonces tenemos

1) $D_x(\operatorname{sen} u)=\cos u.\ D_x(u)$

2) $D_x(\cos u)=-\operatorname{sen} u.\ D_x(u)$

3) $D_x(\tan u)=\sec^2 u.D_x(u)$

4) $D_x(\cot u)==-\csc^2 u.D_x(u)$

5) $D_x(\sec u)=\sec u\tan u.D_x(u)$

6) $D_x(\csc u)=-\csc u\cot u.D_x(u)$

Ejemplo 17. Si $y=x^2\cot 2x$, encuentre $y'=\frac{dy}{dx}$.

Solución

Utilizando las reglas de derivación, se obtiene

$$\frac{dy}{dx}=x^2(\cot 2x)'+(\cot 2x)(x^2)'=x^2[-\csc^2(2x)]+2x\cot 2x$$

$$=-2x^2.\csc^2 2x+2x\cot 2x$$

Ejemplo 18. Sean $f(x)=\tan^3 x+\sec^2 x-\frac{1}{x}$, $g(x)=\operatorname{sen}(\tan x+\sec x)$ y $h(x)=\sqrt[4]{\sec\sqrt{x}}$. Determine

a) $f'(x)$ b) $g'(x)$ c) $h'(x)$

Solución

a) $f'(x)=3\tan^2 x\sec^2 x+2\sec x.\sec x\tan x-(-\frac{1}{x^2})$

$$=\tan x\sec^2 x\,(3\tan x+2)+\frac{1}{x^2},\ \forall x\in D_f$$

b) $g'(x) = \cos(\tan x + \sec x)\cdot(\sec^2 x + \sec x \tan x)$

$$= \sec x(\sec x + \tan x)\cdot\cos(\sec x + \tan x)\,,\ \forall x \in D_g$$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{\sec^3\sqrt{x}}}\cdot\sec\sqrt{x}\cdot\tan\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{\sqrt[4]{\sec\sqrt{x}}.\tan\sqrt{x}}{8\sqrt{x}}\,,\ \forall x \in D_h \wedge x \neq 0$$

Ejemplo 19. Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x}}$, halle $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x}}}\cdot(\alpha)\,,\ \text{donde}$$

$$\alpha = \frac{(\sec^2 x + \cos x(\tan x - \operatorname{sen} x) - (\tan x \operatorname{sen} x)(\sec^2 x - \cos x)}{(\tan x - \operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{\tan x - \operatorname{sen} x}}{2\sqrt{\tan x + \operatorname{sen} x}}\cdot\frac{2[\operatorname{sen} x - \sec^2 x.\operatorname{sen} x]}{(\tan x - \operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \tan^2 x}{(\tan x - \operatorname{sen} x)\sqrt{\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} = -\frac{\tan x}{\tan x - \operatorname{sen} x}$$

Ejemplo 20. Si $f(x) = \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x})\cos^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$, calcule $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$ y simplificando la fracción, se tiene

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x})^2}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos^2 x = (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x})^2$$

Derivando la función respecto a x, se obtiene

$$f'(x) = 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}\right)$$

Por tanto, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Ejemplo 21. Si $\tan y = 3x^2 + \tan(x + y)$, halle $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Solución

Derivando implícitamente, se obtiene

$\sec^2 y.y' = 6x + \sec^2(x + y)(1 + y')$, de donde

$$y' = \frac{6x + \sec^2(x + y)}{\sec^2 y - \sec^2(x + y)}$$

Ejemplo 22. Dada $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, halle $f^n(x)$.

Solución

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos(2x + \pi)$$

$$f'''(x) = 2^2\operatorname{sen}(2x + \pi) = -2^2\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3\operatorname{sen}\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = -2^3\cos(2x + 2\pi)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 23. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g'(2) = 1$. Calcule $F'(x)$ y $F'(1)$ si $F(x) = g\left(2 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$.

Solución

$$F'(x) = g'\left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$F'(1) = g'(2)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 24. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, calcule su n-ésima derivada y desarrolle su serie de Maclaurin con su resto de Lagrange.

Solución

Usaremos la identidad $\cos u = \operatorname{sen}\left(u + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x) = \operatorname{sen} x\ ,\ f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\ ,\ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x + \pi)\ ,\ f''(0) = 0$$

www.FreeLibros.com

$f'''(x) = \cos(x+\pi) = \text{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}(x+2\pi)$, $f^{(4)}(0) = 0$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Por la fórmula de Maclaurin, se tiene

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ \theta \in (0;1)$$

Por tanto,

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\text{sen}\left(\theta x + \frac{(n+1)}{2}\pi\right), \theta \in (0;1)$$

Ejemplo 25. Halle las ecuaciones de la tangente y normal a la curva cuya ecuación es $y = \sqrt{1+\text{sen}^2 2x}$ en el punto de abscisa $x = \pi/6$.

Solución

El punto de tangencia es $P\left(\frac{\pi}{6}; f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = P\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

$f'(x) = y' = \frac{\text{sen}\, 4x}{\sqrt{1+\text{sen}^2 2x}}$, entonces $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ecuación de la recta tangente: $y - \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Ecuación de la recta normal: $y - \frac{\sqrt{7}}{2} = -\frac{7}{\sqrt{21}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Ejemplo 26. Trace la gráfica de la función $f(x) = x\tan x$, $x \in \langle -\pi/2 ; \pi/2 \rangle$ e indique sus valores extremos, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución

$f'(x) = \tan x + x\sec^2 x$

Si $f'(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(2x) + 2x = 0$. Luego, el único valor de x, con $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$, que satisface esta condición es $x = 0$. Así, tenemos la siguiente tabla:

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\pi/2; 0\rangle$	$-$	decreciente	Valor Mín. $f(0) = 0$
$\langle 0; \pi/2\rangle$	$+$	creciente	

Como $f''(x) = 2\sec^2 x(1 + x\tan x)$ y considerando que x y $\tan x$ tienen el mismo signo en $\langle -\frac{\pi}{2}; 0\rangle$ y $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, entonces $f''(x) > 0$, $\forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$.

Así, f es cóncava hacia arriba en $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ y no existe punto de inflexión.

Como $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} x\tan x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x\tan x = +\infty$, las rectas $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales. La gráfica se muestra en la figura 8.17.

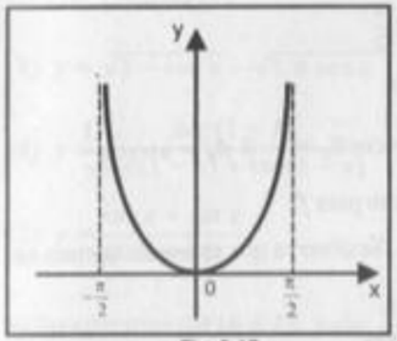


Fig. 8.17

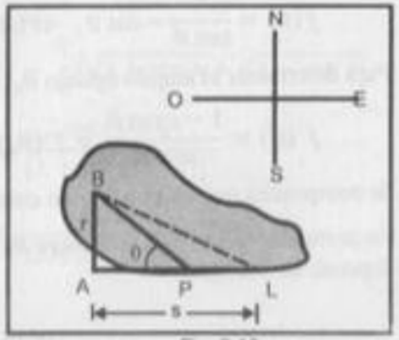


Fig. 8.18

Ejemplo 27

Es conocido que las palomas mensajeras evitan volar sobre grandes áreas de agua, a menos que sean forzadas a hacerlo. Sin embargo, se desconoce la razón de este comportamiento. En este ejemplo, supondremos que nuestra paloma prefiere dar una vuelta en torno a un lago, ya que los efectos de la luz del día y del aire disminuyen sobre el agua fría (lo que aumenta la energía requerida para mantener la altitud del vuelo). Supongamos (ver Fig. 8.18) que nuestra paloma es soltada de un barco (punto B) que navega en el lado oeste de un lago y que el palomar (punto L) está localizado en el lado sudeste. El camino más corto es indicado con la línea punteada. Inicialmente, la paloma se dirige a un cierto punto P en el lado sudoeste, no muy lejos de B, y luego va por la orilla del lago hacia L. Si se considera que la orilla es recta en la dirección este-oeste, localice P de modo que la energía requerida para el vuelo de B a L sea mínima. En otras palabras, ¿cuál es el ángulo $\measuredangle BPA$ óptimo?

Solución

Sea A un punto en la orilla del lago, exactamente al sur de B y $\theta = \measuredangle$BPA. Haciendo $\overline{AB} = r$ y $\overline{AL} = s$, tenemos

$$\overline{BP} = \frac{r}{\text{sen}\,\theta}, \ \overline{AP} = r\cot\theta, \ \overline{PL} = \overline{AL} - \overline{AP} = s - r\cot\theta$$

www.FreeLibros.com

Sea e_1 la energía requerida para volar una unidad de la longitud del lago y e_2 la energía requerida para volar a la orilla del lago. Asumimos que no hay interferencia con el viento horizontal. Por las razones expuestas en el problema, $e_1 > e_2$ ó $e_1 = ce_2$ para una constante $c > 1$. La energía total requerida para volar de B a L es

$$E = e_1\overline{BP} + e_2\overline{PL} = e_1\frac{r}{\operatorname{sen}\theta} + e_2(s - r\cot\theta) = e_2 s + e_2 r\left(\frac{c}{\operatorname{sen}\theta} - \cot\theta\right)$$

Vemos que la expresión del último paréntesis sólo depende de θ. Por ello, será suficiente minimizar la función

$$f(\theta) = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta} - \cot\theta\,,\quad \sphericalangle PLB \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Para determinar el ángulo óptimo θ_0, tenemos

$$f'(\theta) = \frac{1 - c\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\ \text{ y } f'(\theta_0) = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{1}{c}\ \text{ ó }\ \theta_0 = \arccos\frac{1}{c}$$

Se comprueba que en éste ángulo existe mínimo para f.

En particular, si $c = 2$, entonces $\theta_0 = \pi/3$. Se observa que el ángulo óptimo no depende de r ni de s.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 15, halle la derivada $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

1) $y = \operatorname{sen}^2(5x - 3)$ R. $5\operatorname{sen}(10x - 6)$

2) $y = \cos^2[(a - x)^3]$ R. $-3(a - x)^2\operatorname{sen}(2(a - x)^3)$

3) $y = \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ R. $-\cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$

4) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen}x}{1 + x^2}$ R. $\dfrac{(1 - x^2)\operatorname{sen}x + x(1 + x^2)\cos x}{(1 + x^2)^2}$

5) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x$ R. $\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x(4\cos^2 x - 3\operatorname{sen}x)$

6) $y = \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}^n x$ R. $n\operatorname{sen}^{n-1}x[\operatorname{sen}(nx)\cos x + \operatorname{sen}x\cos(nx)]$

7) $y = \dfrac{\operatorname{sen}x + \cos x}{\operatorname{sen}x - \cos x}$ R. $\dfrac{-2}{(\operatorname{sen}x - \cos x)^2}$

8) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}2x}{\tan x}$ R. $-2\operatorname{sen}(2x)$

9) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$ R. $\dfrac{2\sec^2 x}{\sec^2 x + 2\tan x}$

10) $f(x) = \dfrac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$ R. $\dfrac{2\sec x(\tan x - \sec x)}{\sec x + \tan x}$

11) $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ R. $-\dfrac{2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$

12) $y = \dfrac{(\operatorname{sen}(nx))^m}{(\cos(mx))^n}$ R. $\dfrac{mn(\operatorname{sen}(nx))^{n-1}\cos(m - n)x}{(\cos(mx))^{n+1}}$

13) $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen}x}$ R. $-\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \operatorname{sen}x} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}x}\right]$

14) $y = \dfrac{\sec(1 - x)}{\sec(1 - x) + \tan(1 - x)}$ R. $\dfrac{\cos(1 - x)}{[1 + \operatorname{sen}(1 - x)]^2}$

15) $y = \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc x - \cot x}$ R. $\dfrac{-2\csc x}{(\csc x - \cot x)^2}$

En los ejercicios del 16 al 28, halle $\dfrac{dy}{dx} = y'$.

16) $y = \cos(x - y)$ R. $\dfrac{1}{1 - \csc(x - y)}$

17) $\tan y = 3x^2 + \tan(x + y)$ R. $\dfrac{6x + \sec^2(x + y)}{\sec^2 y - \sec^2(x + y)}$

18) $\cot(xy) + xy = 0$ R. $-\dfrac{y}{x}$

19) $\cos(x + y) = y\operatorname{sen}x$ R. $-\dfrac{y\cos x + \operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(x + y)}$

20) $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 1$ R. $\cot x\cot y$

21) $y = \operatorname{sen}(\cos(x^2 + y^2))$ R. $\dfrac{2x\cos(\cos(x^2 + y^2))\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 + 2y\cos(\cos(x^2 + y^2))\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

22) $y = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\operatorname{sen}x$ R. $\dfrac{8}{\cos^5 x} - \dfrac{3}{\cos x}$

23) $y = \dfrac{\operatorname{sen}x\cos x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x}}$ R. $\dfrac{a\cos^4 x - b\operatorname{sen}^4 x}{\sqrt{(a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x)^3}}$

www.FreeLibros.com

24) $y = \left(\frac{\cos x}{8} + \frac{\cos^3 x}{12} - \frac{\cos^5 x}{3}\right)\frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{x}{16}$ R. $\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x$

25) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{6}\left(\cos^5 x + \frac{5}{4}\cos^3 x\right) + \frac{5}{10}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{5}{16}x$ R. $\cos^6 x$

26) $y = \frac{\operatorname{sen}(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\operatorname{sen}(a+b-c)x}{a+b-c} - \frac{\operatorname{sen}(a-b-c)x}{a-b-c} - \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{a+b+c}$

R. $4\cos(ax)\operatorname{sen}(bx)\operatorname{sen}(cx)$

27) $y = -\frac{1}{5\cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^5 x} + \frac{2}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{8}{\operatorname{sen} x}\right) + \frac{16}{5}\tan x + 3$ R. $\frac{1}{\operatorname{sen}^6 x \cos^2 x}$

28) $y = \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{2}\left(\frac{\cos^2 x}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16}(\operatorname{sen} x \cos x - x)$ R. $\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x$

29) Si $y = A \operatorname{sen} kx + B\cos kx$, con A, B y k constantes, demuestre que

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y$ b) $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = (-1)^n k^{2n} y$

30) Si $y = A\cos(nx) + B\operatorname{sen}(nx)$, con A, B y k constantes, demuestre que $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0$.

31) Determine el valor de A (constante) de modo que $y = A\operatorname{sen} 2x$ satisfaga la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 3\operatorname{sen}(2x)$. R. $A = -3$

32) Halle las constantes A y B de modo que $y = A\,sen\,3x - B\cos 3x$ satisfaga la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 3y = 10\cos 3x$.

R. $A = \frac{2}{3}$; $B = \frac{1}{3}$

33) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Calcule f' y $D_{f'}$.

R. $f'(x) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$

34) Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Determine f', f'', f''' y sus dominios de definición.

R. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$

$f''(x) = \begin{cases} \left(6x + \frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 4\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $D_{f''} = \mathbb{R}$

$f'''(x) = \begin{cases} \left(6 - \frac{5}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $D_{f'''} = \mathbb{R}$

35) Halle $f'(0)$, si $f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y $g(0) = g'(0)$.

36) Sea $f(x) = \cos x$, halle $f^{(n)}(x)$ y desarrolle la fórmula de Maclaurin con resto de Lagrange. R. $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

37) Si $f(x) = \cos^2 x$, halle $f^{(n)}(x)$. R. $2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

38) Sea $f(x) = 5\operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $g(f(x)) = \cos x$, en el mismo intervalo. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{5}{2}$. R. $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{15}\left(x - \frac{5}{2}\right)$

En los ejercicios del 39 al 41, usando el método de Newton, halle el valor aproximado de la raíz de cada una de las ecuaciones en el intervalo que se indica.

39) $x - \tan x = 0$ en $\langle 0; \frac{3\pi}{2}\rangle$ R. 4,4935

40) $\operatorname{sen} x = 1 - x$ (con tres cifras decimales) R. 0,511

41) $x^2 \arctan x = 1$ (con tres cifras decimales) R. 1,096

Para cada una de las siguientes funciones que se dan en los ejercicios del 42 al 47:

a) Halle los intervalos de crecimiento.

b) Determine los valores extremos.

c) Halle los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

d) Determine las asíntotas.

e) Bosqueje la gráfica.

www.FreeLibros.com

42) $f(x) = x + \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le 2\pi$

R. creciente en $(0;2\pi)$, $\cup$ en $(\pi;2\pi)$ y $\cap$ en $(0;\pi)$

43) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x\ ,\ x \in [0;\pi]$ R. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ máx. local

44) $f(x) = 2x - \tan x\ ,\ x \in [0;\pi]$

R. máx. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}57$, mín. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5{,}71$, P.I: $(0;0)$ y $(\pi;2\pi)$

45) $y = \operatorname{sen} 3x - 3\operatorname{sen} x\ ,\ x \in [0;2\pi)$ R. máx. en $x = \frac{3\pi}{2}$, mín. en $x = \frac{\pi}{2}$

46) $y = \operatorname{sen} \pi x - \cos \pi x\ ,\ x \in [0;2]$

R. máx. en $x = \frac{3}{4}$, mín. en $x = \frac{7}{4}$, P.I: $\left(\frac{1}{4};0\right)$ y $\left(\frac{5}{4};0\right)$

47) $y = \operatorname{sen} 2x + 2\cos x\ ,\ x \in [0;\pi]$ R. máx. en $x = \frac{\pi}{6}$, mín. en $x = \frac{5\pi}{6}$

48) Un cartel tiene sus bordes superior e inferior a la altura m y $m/3$con respecto a la visual de un observador, respectivamente ¿A qué distancia debe colocarse el observador para que el ángulo determinado por el ojo y los bordes sea máxima? R. $\sqrt{3}/3\ m$

49) Halle el ángulo del sector circular que debe cortarse de un trozo circular de tela de radio R cm, de modo que la copa cónica determinada por el resto de la tela tenga el máximo volumen.

50) Se transporta una viga de acero de 3m de largo por un pasillo de 1m de ancho hasta llegar a un corredor que forma un ángulo recto con el pasillo. Sin considerar el ancho de la viga, calcule el ancho del corredor de manera que la viga pueda pasar por la esquina formada por el corredor y el pasillo.

R. 1,1666

8.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Proposición 6. Las funciones trigonométricas inversas son derivables. Se cumple:

a) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

b) $f(x) = \arccos x$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

c) $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \operatorname{arccot} x$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \operatorname{arcsec} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

f) $f(x) = \operatorname{arccsc} x$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

Demostración

a) Sea $f(x) = y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1;1] \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\operatorname{sen} y = x$.

Derivando esta expresión implícitamente respecto a x, tenemos

$$\cos y . y' = 1 \ \text{ ó } \ y' = \frac{1}{\cos y} \qquad (1)$$

Por otro lado, $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ (pues $\cos y \ge 0$).

Reemplazando esta expresión en (1), se obtiene

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \text{ para } -1 < x < 1$$

b) Sea $f(x) = y = \arccos x$, $x \in [-1;1] \wedge y \in [0;\pi]$, entonces $\cos y = x$.

Derivando implícitamente respecto a x, tenemos: $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}$

Pero, $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ ($\operatorname{sen} y \ge 0$, pues $y \in [0;\pi]$).

Entonces, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $|x| < 1$.

www.FreeLibros.com

e) Sea $f(x) = y = \text{arcsec}\, x$, $y \in [0; \frac{\pi}{2}\rangle \cup \langle\frac{\pi}{2}; \pi]$ $\wedge$ $x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$, entonces $\sec y = x$. Derivando implícitamente respecto a x, se obtiene

$$y' = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Si $x \in [1; +\infty\rangle \Rightarrow y \in [0; \frac{\pi}{2}\rangle \Rightarrow \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

Si $x \in \langle -\infty; -1] \Rightarrow y \in \langle\frac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow \tan y = -\sqrt{\sec^2 y - 1} = -\sqrt{x^2 - 1}$

En resumen, $y' = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x \in \langle -\infty, -1\rangle \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x \in \langle 1, +\infty\rangle \end{cases}$

Por tanto, $y' = f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, si $x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$.

Corolario. Si $u = u(x)$ es una función derivable con respecto a la variable x, entonces

1) $D_x(\text{arcsen}\, u) = \dfrac{D_x(u)}{\sqrt{1-u^2}}$ 2) $D_x(\text{arccos}\, u) = -\dfrac{D_x(u)}{\sqrt{1-u^2}}$

3) $D_x(\arctan u) = \dfrac{D_x(u)}{1+u^2}$ 4) $D_x(\text{arccot}\, u) = -\dfrac{D_x(u)}{1+u^2}$

5) $D_x(\text{arcsec}\, u) = \dfrac{D_x(u)}{|u|\sqrt{u^2-1}}$ 6) $D_x(\text{arccsc}\, u) = -\dfrac{D_x(u)}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Ejemplo 28. Dado $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$, calcule $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1$$

Ejemplo 29. Si $f(x) = \text{arcsec}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$.

a) Determine D_f.

b) Determine $f'(x)$ y $D_{f'}$.

www.FreeLibros.com

Solución

a) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} \geq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \geq \sqrt{2}|a|\}$

b) Aplicando la fórmula correspondiente, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-2}} \cdot \frac{x/a^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = \frac{x|a|}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-2a^2}}$$

$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > \sqrt{2}|a|\}$

Ejemplo 30. Si $f(x) = \arctan\left(\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right)$, halle

a) D_f b) $f'(x)$ y $D_{f'}$

Solución

a) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\pm\dfrac{|a|}{\sqrt{3}}\right\}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left[\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right]^2} \cdot \dfrac{3a(x^4+2a^2x^2+a^4)}{a^2(a^2-3x^2)^2} = \dfrac{3a}{x^2+a^2}$

$D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \pm\dfrac{|a|}{\sqrt{3}}\right\}$

Ejemplo 31. Si $f(x) = x\sqrt{c^2-x^2} + c^2 \text{ arcsen}\dfrac{x}{c}$, $c > 0$, halle

a) D_f b) $f'(x)$ y $D_{f'}$

Solución

a) Si $f_1(x) = x\sqrt{c^2-x^2}$ y $f_2(x) = c^2 \text{ arcsen}\left(\dfrac{x}{c}\right) \Longrightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \ / c^2 - x^2 \geq 0\} = [-c; c]$

$D_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} \ / -1 \leq \dfrac{x}{c} \leq 1\right\} = [-c; c]$.

Luego, $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [-c; c]$.

b) $f'(x) = \dfrac{c^2-2x^2}{\sqrt{c^2-x^2}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{c^2-x^2}} = 2\sqrt{c^2-x^2}$, si $|x| < c$.

$D_{f'} = \langle -c; c\rangle$

Ejemplo 32. Sea $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Halle $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2\left[2b\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+a-b\right]}$$

Ejemplo 33. Dada $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, halle su derivada respecto a $\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Solución

Sea $y = \operatorname{arccot}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ y $z = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}} = \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}} = -\frac{|1-x^2|}{1-x^2} = \begin{cases} -1, & \text{si } |x|<1 \\ 1, & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

Ejemplo 34 Halle la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

Punto de tangencia: $P(0; f(0)) = P(0; 0)$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow m_T = y'\big|_{x=0} = 1$$

Ecuación de la recta tangente: $y = x$.

Ejemplo 35 Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right) + \operatorname{arccot}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right) + \arctan(3x)$$

Solución

i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) **Asíntotas:** Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$, las asíntotas horizontales de la gráfica de f son las rectas $y = 0$ (a la izquierda) e $y = \pi$ (a la derecha). No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

iii) $f'(x) = \frac{3}{9x^2+1} > 0$. Entonces, f no tiene valores extremos relativos pues es creciente en $\mathbb{R}$.

iv) $f''(x) = -\frac{54x}{(1+9x^2)^2}$. Entonces, $x = 0$ es un punto crítico de inflexión.

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Pto. de Inflexión
$\langle -\infty; 0\rangle$	+	$\cup$	PI: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
$\langle 0; +\infty\rangle$	−	$\cap$	

v) La gráfica se muestra en la Fig. 8.19.

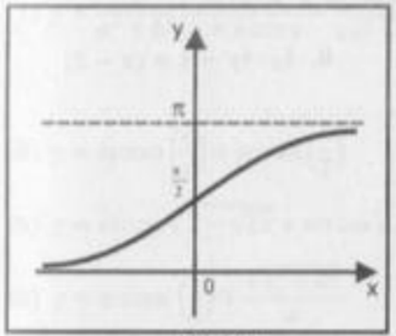


Fig. 8.19

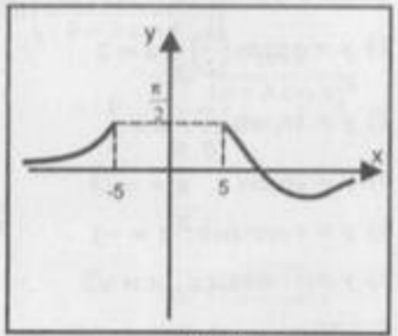


Fig. 8.20

Ejemplo 36. Sea $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{13-x}{x^2-x-12}\right)$. Halle las asíntotas y los intervalos de crecimiento de $y = f(x)$ y además, bosqueje su gráfica.

Solución

a) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq \frac{13-x}{x^2-x-12} \leq 1\right\} = \langle -\infty; -5] \cup [5; +\infty\rangle \cup \{1\}$

b) **Asíntotas:** Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la única asíntota horizontal es $y = 0$. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

c) $$f'(x) = \frac{x^2-26x+25}{(x^2-x-12)^2\sqrt{1-\left[\frac{13-x}{x^2-x-12}\right]^2}}$$

Punto crítico: $x = 25$.

www.FreeLibros.com

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -5\rangle$	+	crece	
$\langle 5; 25\rangle$	−	decrece	$f(25) \cong 1{,}17$ mín.
$\langle 25; +\infty\rangle$	+	crece	

d) La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la Fig. 8.20 (se debe tener en cuenta que $f(-5) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(5) = \frac{\pi}{2}$ y $f(13) = 0$).

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 5, determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

1) $y = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$, $a = 2$ R. $L_T: 4y - \pi = (x - 2)$

2) $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$, $a = \frac{1}{2}$

3) $y = \arctan x$, $a = -\sqrt{3}$

4) $y = x\arctan x$, $a = -1$

5) $y = x^2 \operatorname{arcsec} x$, $a = \sqrt{2}$

6) Utilizando el método de Newton, halle la raíz real de la ecuación $x^2 \arctan x = 1$ con una precisión de 2 cifras decimales.

En los ejercicios del 7 al 36, halle $y' = \frac{dy}{dx}$ de cada una de las siguientes funciones.

7) $y = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ R. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $y = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ R. $\frac{2}{1+x^2}$

9) $y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ R. $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $y = (x+a)\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) - \sqrt{ax}$ R. $\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$

11) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$ R. $\frac{1}{1+\cos^2 x}$

12) $y = -\frac{\cos^2 x}{a^2} + \frac{1}{a^3}\arctan(a\cos x)$ R. $\operatorname{sen} x \cos^2 x$

13) $y = \arccos\left(\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$ R. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a + b\cos x}$

14) $y = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)$ R. $x^2 \arccos x$

15) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x} + \operatorname{arcsen}\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ R. $-\sqrt{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}$

16) $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$ R. $(\operatorname{arcsen} x)^2$

17) $y = \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a\operatorname{sen} x}{a + b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{sen} x}{b + a\cos x}\right)\right]$ R. $\frac{\cos x}{(a + b\cos x)^2}$

18) $y = \arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ R. 0

19) $y = \operatorname{arcsec}\sqrt{2 - \sqrt{2x}} + \arccos\sqrt{2 - \sqrt{2x}}$ R. 0

20) $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ R. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

21) $y = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 4}{3}\right)$ R. $\frac{1}{5 + 4\operatorname{sen} x}$

22) $y = \arctan\left(\frac{3\operatorname{sen} x}{4 + 5\cos x}\right)$ R. $\frac{3}{5 + 4\cos x}$

23) $y = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 4}{3}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{5\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 4}{3}\right)$ R. $\frac{5}{10 + 8\operatorname{sen} x}$

24) $y = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \cdot \operatorname{arccsc}\frac{x}{a}$ R. $\frac{a\left[\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\right]}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$

25) $f(x) = \operatorname{arccsc}^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ R. $-\frac{2}{|1+x|\sqrt{x}}\operatorname{arccsc}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

26) $f(x) = (x^2+1)\operatorname{arccot} x$ R. $-1 + 2x\operatorname{arccot} x$

www.FreeLibros.com

27) $f(x) = \text{arcsen}\, x + \sqrt{x(1-x)}$ R. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

28) $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} + \arccos\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}$ R. 0

29) $f(x) = \text{sen}[\text{arcsen}(\text{sen}(\text{arcsen}\, x^2))]$ R. $2x$

30) $\arctan(x+y) = \dfrac{1}{3}[\arctan x + \arctan y]$

31) $xy = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

32) $\arccos\left[\cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right] = y^5$

33) $\sqrt{x^2+y^2} = b\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

34) $x\arccos y + y\arctan x = \text{arcsen}(x+y)$

35) $\arccos(xy) = \text{arcsen}(x+y)$

36) $x = \text{arcsen}(1-y)$

37) Compruebe que $y = \dfrac{\text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la ecuación diferencial

$(1-x^2)y' - xy - 1 = 0$

38) Compruebe que $y = \text{sen}(m\, \text{arcsen}\, x)$ satisface la ecuación diferencial

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\cdot\dfrac{dy}{dx} - m^2$

39) Si $\dfrac{y}{a} = \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$, halle y''.

En los siguientes ejercicios, trace la gráfica de las funciones que se indican.

40) $y = x\arctan x$

41) $y = x - 2\arctan x$

42) $y = \text{arcsen}(x^2)$

43) $y = \text{arcsen}(x^2 + 3x - 10)$

44) $y = \arccos\sqrt{x}$

45) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$

46) $y = \arctan(x+1)$

47) $y = \text{arcsec}(\sqrt{x+1})$

48) $y = \text{arcsen}\sqrt{x^2-1}$

49) $y = \text{arcsec}\sqrt{1-x^2}$ (*)

(*) Su gráfica se reduce a 2 puntos

www.FreeLibros.com

50) $y = \arccos\left(\dfrac{4-x^2}{1+x^2}\right)$

51) $y = \text{arccot}\left(\dfrac{1+x-x^2}{1+x+x^2}\right)$

52) $f(x) = \begin{cases} |x+4|^{2/3}|x+1|^{1/3}, & x < -1 \\ \arctan[(x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}], & -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{\pi}{2} - \text{arccot}[(x-2)^{2/3}(x-4)^{1/3}], & 2 < x \le 4 \\ \text{arcsen}\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right), & x > 4 \end{cases}$

R. Asíntotas: $y = -x - 3$; $y = \pi/2$

máx. en $x = -2$ y $x = 2$; mín. en $x = -4$, $x = 1$ y $x = 10/3$

53) $f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right) - \dfrac{\pi}{2}, & x < -2 \\ \arctan[(x+2)^{1/3}(x-1)^{2/3}], & -2 \le x \le 1 \\ \text{arccot}[(x-1)^{1/3}(x-5)^{2/3}] - \dfrac{\pi}{2}, & 1 < x \le 5 \\ |x-5|^{1/3}|x-9|^{2/3}, & x > 5 \end{cases}$

R. Asíntota: $y = -\pi/2$

máx. en $x = -1$ y $x = 19/3$; mín. en $x = 7/3$ y $x = 9$

54) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \text{arccot}\left(\dfrac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9}\right), & x < -1 \\ \arctan\left[\dfrac{7}{8}(x^3+1)^{1/3} - \dfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3}\right], & -1 \le x \le 2 \\ \text{arcsec}\sqrt{\dfrac{5x-1}{4x+1}} + \arctan\left(-\dfrac{11}{8}\sqrt[3]{9}\right), & x > 2 \end{cases}$

55) $f(x) = \begin{cases} \text{arcsen}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right) + 2, & x \le -2 \\ \arccos\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right) + \dfrac{4-\pi}{2}, & -2 < x \le 2 \\ 2 - \arctan[(x-2)^{3/5}(x-5)^3], & 2 < x \le 5 \\ \text{arccot}\left(\dfrac{x^2-15x+50}{x^2+15x+50}\right) + \dfrac{4-\pi}{2}, & 5 < x \le 10 \\ (x-10)^{3/7}(x+10)^{4/7} + 2, & x > 10 \end{cases}$

8.7 FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE a

La **función exponencial general de base a** es la función real dada por la regla de correspondencia

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real fijo, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

El dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = (0; +\infty)$.

La gráfica de la función $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ y $a > 1$ se muestra en las figuras 8.21 y 8.22, respectivamente.

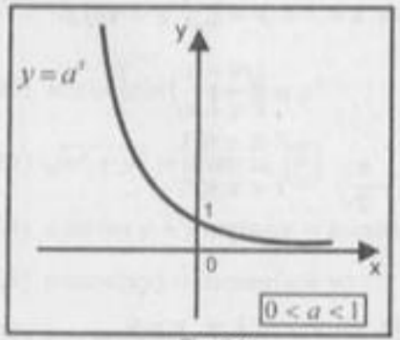


Fig. 8.21

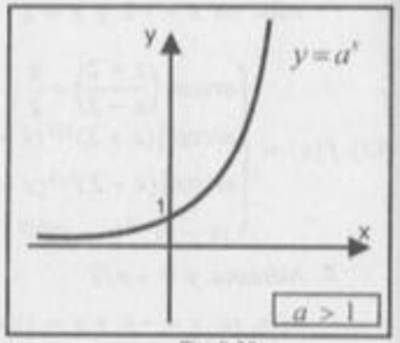


Fig. 8.22

8.7.1 PROPIEDADES

1. Sean x e y números reales arbitrarios. Para $a > 0$ y $a \neq 1$, se tiene

   i) $(a^x)^y = a^{xy}$ ii) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

   iii) $(a.b)^x = a^x.b^x$ iv) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

   v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ vi) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

2. Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x$ es decreciente en todo su dominio; mientras que si. $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ es creciente en todo su dominio.

3. Si $0 < a < 1$, se cumple

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ (la recta $y = 0$ es A.H.D.) (Fig.8.21)

4. Si $a > 1$, se tiene

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ (la recta $y = 0$ es A.H.I.) (Fig.8.22)

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

www.FreeLibros.com

8.8 FUNCIÓN LOGARITMO GENERAL DE BASE a

Dado un número real $a > 0$ y $a \neq 1$, la **función logarítmica de base a** es la función inversa de la función exponencial general $y = f(x) = a^x$ y está dada por la regla de correspondencia

$$y = f^{-1}(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Su dominio es $(0; +\infty)$ y su rango es $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

En la figura 8.23, se muestra la gráfica de $y = \log_a x$ para $0 < a < 1$, y en la figura 8.24, la gráfica de $y = \log_a x$ para $a > 1$.

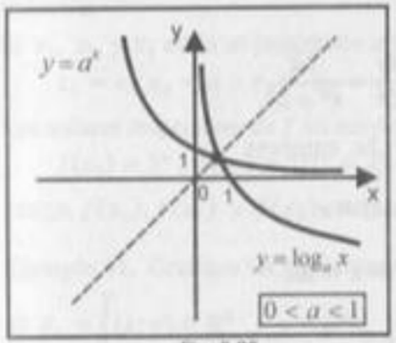


Fig. 8.23

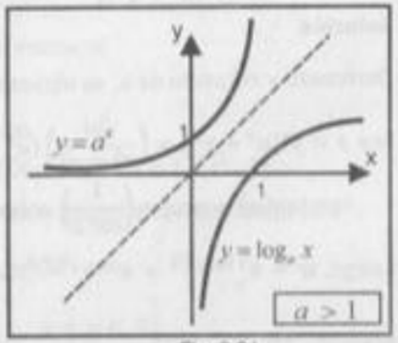


Fig. 8.24

8.8.1 PROPIEDADES

1. Sean A y B números reales positivos cualquiera. Para $a > 0$ y $a \neq 1$, tenemos

   i) $\log_a(1) = 0$ ii) $\log_a(a) = 1$

   iii) $\log_a(a^x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ iv) $a^{\log_a(x)} = x,\ \forall x > 0$

   v) $\log_a(A.B) = \log_a(A) + \log_a(B)$ vi) $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

   vii) $\log_a(A^r) = r\log_a A,\ r \in \mathbb{R}$ viii) $\log_a \dfrac{1}{A} = -\log_a A$

   ix) $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ $(x > 0,\ c > 0$ y $c \neq 1)$ (cambio de base)

2. Si $0 < a < 1$, se cumple

   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ (la recta $x = 0$ es asíntota vertical)

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

   c) La función $g(x) = \log_a x$ es decreciente en su dominio $\langle 0; +\infty)$.

3. Si $a > 1$, se tiene

a) $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ (la recta $x = 0$ es asíntota vertical)

b) $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

c) La función $g(x) = \log_a x$ es creciente en su dominio $(0; +\infty)$.

Ejemplo 37. Si $y = \arctan\left(\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right)$, simplifique $w = 4^{5\log_4 \sqrt[5]{\arctan\alpha}}$, donde $\alpha = \frac{1}{\cot[y'(a^2 + x^2)]} \wedge y' = \frac{dy}{dx}$.

Solución

Derivando y respecto de x, se obtiene $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3a}{x^2 + a^2}$

Sea $z = y'(a^2 + x^2) = \left(\frac{3a}{x^2 + a^2}\right)(a^2 + x^2) = 3a$, entonces

$$\arctan(\alpha) = \arctan\left(\frac{1}{\cot z}\right) = \arctan(\tan z) = z$$

Luego, $w = 4^{5\log_4 \sqrt[5]{z}} = 4^{\log_4 (\sqrt[5]{z})^5} = 4^{\log_4 z} = z = 3a$

Ejemplo 38. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ y $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Demuestre

a) $f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$

b) $g(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$

Solución

a) $f(x + y) = \frac{1}{2}[a^{x+y} + a^{-(x+y)}]$, $f(y) = \frac{1}{2}(a^y + a^{-y})$ y $g(y) = \frac{1}{2}(a^y - a^{-y})$

Luego, $f(x)f(y) = \frac{1}{4}[a^{x+y} + a^{x-y} + a^{y-x} + a^{-(x+y)}]$ y

$$g(x)g(y) = \frac{1}{4}[a^{x+y} - a^{x-y} - a^{y-x} + a^{-(x+y)}]$$

Por tanto, $f(x)f(y) + g(x)g(y) = \frac{1}{2}[a^{x+y} + a^{-(x+y)}] = f(x + y)$.

b) Ejercicio para el lector.

Ejemplo 39. Si $f(x) = \log\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$, demuestre que $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)$.

Solución

Reescribiendo los valores de f en $x = a$ y $x = b$, se tiene

$$f(a) + f(b) = \log\left(\frac{1 - a}{1 + a}\right) + \log\left(\frac{1 - b}{1 + b}\right) = \log\frac{(1 - a)(1 - b)}{(1 + a)(1 + b)} = \log\left[\frac{1 - b - a + ab}{1 + a + b + ab}\right]$$

Por otro lado,

$$f\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right) = \log\left[\frac{1 - \left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)}{1 + \left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)}\right] = \log\left[\frac{1 - b - a + ab}{1 + a + b + ab}\right] = f(a) + f(b)$$

Por tanto, $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)$.

Ejemplo 40. Si $f(x) = 3^x$ y x_1, x_2, x_3 son tres números en progresión aritmética, demuestre que $f(x_1), f(x_2)$, y $f(x_3)$ están en progresión geométrica y halle la razón.

Solución

Si x_1, x_2 y x_3 están en progresión aritmética, entonces

$$x_1 = a,\ x_2 = a + r \ \text{ y } \ x_3 = a + 2r$$

Los valores respectivos de f en estos puntos son

$$f(x_1) = 3^a,\ f(x_2) = 3^{a+r} = 3^r \cdot 3^a \ \text{ y } \ f(x_3) = 3^{a+2r} = (3^r)^2 \cdot 3^a$$

Luego, $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ están en progresión geométrica cuya razón es 3^r.

Ejemplo 41. Grafique las siguientes relaciones:

a) $R_1 = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 2^x,\ y \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x + y \leq 3\right\}$

b) $R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < \log_2 x,\ y \geq 0,\ 2x + 3y - 6 \leq 0\}$

Solución

a) La gráfica de la relación R_1 es la parte sombreada de la fig. 8.25.

b) La gráfica de la relación R_2, es la parte sombreada de la fig. 8.26.

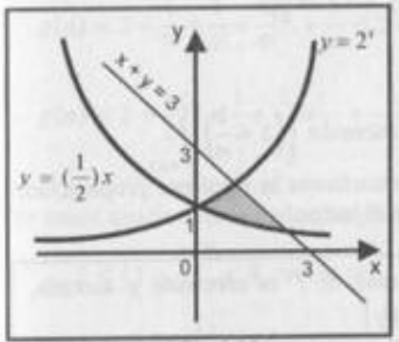


Fig. 8.25

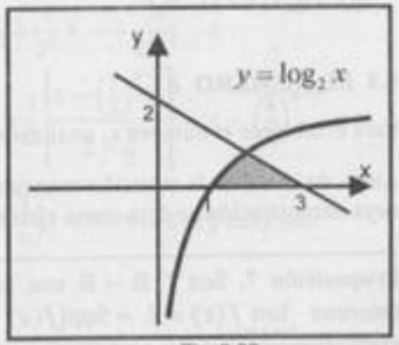


Fig. 8.26

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

1) Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = -(5^x)$ b) $y = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$ c) $y = 3^x$

d) $y = (\sqrt{2})^x$ e) $y = \pi^{-x}$ f) $y = -(2^{-x})$

g) $y = \log_3 x$ h) $y = \log_{0.5} x$ i) $y = \log_2(x+1)$

2) Sombree la gráfica de las siguientes relaciones:

a) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 2^x \,,\ y \geq 2^{-x}\}$

b) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 2^{-x} \,,\ x + y \geq 0 \,,\ x^2 + y^2 < 4\}$

c) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 3^x \,,\ x + y < 0 \,,\ y \leq 2^{-x}\}$

d) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq \log_3 x \,,\ x^2 + y^2 \leq 9 \,,\ x > 0\}$

e) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq \log_{1/2} x \,,\ x^2 + y^2 < 16 \,,\ x > 0\}$

f) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq \log_2 x \,,\ x^2 + y^2 < 9 \,,\ y > 0\}$

g) $R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 2^{-y} \,,\ x - y \geq 0 \,,\ x^2 + y^2 < 16\}$

3) Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x = \log_{1/6} 36$ b) $x = \log_{2^3}(\sqrt{5})^{\sqrt{3}}$

c) $x = \log_{3\sqrt{2}}(\cos 30°)^4$ d) $\log_{25} x = 3$

e) $3\log_x 10\sqrt[3]{10} = 4$ f) $2\log_{1/4} x = 3$

g) $\log_{2^x}(\sqrt[3]{25})^4 = 6$ h) $x^{x-1} = \frac{1}{27}$

8.9 EL NÚMERO e

Para establecer el número e, analizaremos la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$

Antes de estudiar la sucesión mencionada, enunciamos la siguiente proposición, cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real. Si f es creciente y acotada, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L = \text{Sup}\{f(x) \ / \ x \in D_f\}$.

Sea $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Se demostrará que g es creciente y acotada superiormente. Luego, en virtud de la proposición 7, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)$ existe y es es igual a $\text{Sup}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$. A este número se denota con e.

Al número e se le conoce como la **Constante de Neper**. Su valor aproximado es $e = 2{,}718281828459045235...$

Proposición 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = Sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$

Demostración

En primer lugar, probaremos que $g(n)$ es creciente. En efecto, según el binomio de Newton, tenemos

$$g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Desarrollando cada combinatoria, se tiene

$$g(n) = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \quad \text{ó}$$

$$g(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (\alpha)$$

De esta última igualdad se deduce que $g(n)$ es creciente cuando crece n, pues cada uno de los sumandos aumenta al pasar del valor n al valor $n+1$, esto es:

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right),\ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right), \text{ etc}$$

Ahora, probaremos que es acotada. En efecto, de (α) se obtiene

$$g(n) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{ó}$$

$$g(n) < 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

Por tanto, queda demostrado que $g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y más aún

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En resumen, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente. Por la proposición 7, existe $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)$ (a este límite se designa con e, donde $2 < e < 3$).

www.FreeLibros.com

Proposición 9. Si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función definida por

$$f(n) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\text{, entonces } \lim_{n\to\infty} f(n) = e$$

Demostración (Ejercicio para el lector)

Sugerencia: Considere $g(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y pruebe $g(n) \le f(n)$ (entonces $0 \le f(n) - g(n)$). Luego, se prueba que $f(n) - g(n) < \frac{3}{n}$. Esto significa que $0 \le f(n) - g(n) < \frac{3}{n}$. Tomando límites, se obtiene $\lim_{n\to\infty}[f(n) - g(n)] = 0$, y de ello se concluye que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = e$.

Proposición 10. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\text{, entonces } \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demostración

Sea $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, entonces $D_f = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$.

Sea x un número real positivo muy grande comprendido entre dos números naturales n y $n + 1$, esto es:

$$n \le x < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Es evidente que si $x \to +\infty$, también $n \to +\infty$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (e)(1) = e \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = (e)(1)^{-1} = e$$

Por el teorema del sándwich, se concluye $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Ahora, veamos el caso donde $x \to -\infty$. Cambiando de variable $x + 1 = -t$, es decir, $x = -(t + 1)$, vemos que cuando $t \to +\infty$, se tiene que $x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

8.91 FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL Y FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función exponencial general de base el número e se denomina **función exponencial natural** de base e, y se escribe

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

El dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y el rango es $R_f = \langle 0; +\infty \rangle$.

Se denomina función logaritmo de base e o **función logaritmo natural** a la función inversa de la función exponencial natural, y su regla de correspondencia es

$$y = f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

El dominio y el rango de la función logaritmo natural son

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0\} = \langle 0; +\infty \rangle \text{ y } R_f = \mathbb{R}$$

Las gráficas de la función exponencial $f(x) = e^x$ y de su función inversa $f^{-1}(x) = \ln x$ se muestran en la figura 8.27.

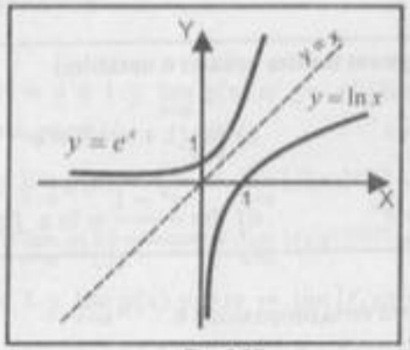


Fig. 8.27

Observación 1

a) *A* $\log_{10} x$ *se le denomina logaritmo decimal o vulgar de* x, *y se denota con* $\log x$.

b) *Por la fórmula de cambio de base, la relación entre* $\ln x$ *y* $\log x$ *es*

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \text{ó} \quad \ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

www.FreeLibros.com

c) *Otras propiedades de las funciones exponencial de base e y logaritmo natural son:*

1) $\ln(e^x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ 2) $e^{\ln x} = x,\ x > 0$

3) $\ln(e) = 1$ 4) $\ln(1) = 0$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

7) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = 0$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Una propiedad muy importante de los límites es la que se da en la siguiente proposición.

Proposición 11. Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L > 0$, entonces

$$\lim_{x\to b}[\log_a[f(x)]] = \log_a\left[\lim_{x\to b} f(x)\right] = \log_a L$$

Demostración. Ejercicio para el lector

Proposición 12 (Algunos límites usuales ó notables)

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ b) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Demostración

a) El límite se demostró en la proposición 8.

b) Sea $x = 1/t$. Como $x \to 0$, entonces $t \to \infty$. Luego,

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

c) Sea $x = at$. Si $x \to \infty$, entonces $t \to \infty$ y

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{at} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^a = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^a = e^a$$

d) Sea $t = a^x - 1$, entonces $a^x = 1 + t$. Tomando logaritmo neperiano a ambos términos tenemos

$$x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}.$$

Si $x \to 0$, entonces $t \to 0$. Luego,

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \ln a \cdot \lim_{t\to0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}$$

Puesto que

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to0}\ln(1+t)^{1/t} = \ln\left[\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}\right] = \ln(e) = 1,$$

se sigue que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$.

8.10 LÍMITES DE LA FORMA: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$

Para calcular este tipo de límites, debemos tomar en cuenta tres casos:

CASO 1. Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = A^B$.

CASO 2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, el cálculo de $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ es inmediato, pues:

Si $A > 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = +\infty$

Si $A > 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = 0$

Si $0 < A < 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = 0$

Si $0 < A < 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = +\infty$

CASO 3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces hay indeterminación de la forma (1^∞).

Para calcular este tipo de límites, se define $\alpha(x) = f(x) - 1$, de modo que $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Luego,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)g(x)}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 42. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{x^2-16}{x-4}\right]^{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)^{x}$

Solución

a) Como $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=8$ y $\lim\limits_{x\to 4}(x-2)=2$, entonces

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x-4}\right)^{x-2}=8^2=64$$

b) Dado que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-3}=2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^{x}=+\infty$$

Ejemplo 43 Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}$

Solución

a) Este límite es de la forma 0/0. Factorizando b^x en el numerador y aplicando límite notables, se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{b^x\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right]}{x}=\lim_{x\to 0}b^x\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}b^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

b) Este límite es de la forma 0/0. Dividiendo numerador y denominador entre x y aplicando límites notables, nos queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}=\frac{m}{n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^{mx}-1}{mx}}{\frac{a^{nx}-1}{nx}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{\ln a}{\ln a}=\frac{m}{n}$$

c) Este límite es de la forma 0/0. Para calcularlo, usamos la estrategia de sumar y restar 1 en el numerador. Luego, aplicando límites notables a cada término, se obtiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\left[\frac{(e^{x-1}-1)-(a^{x-1}-1)}{x-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}-\frac{a^{x-1}-1}{x-1}\right]=\frac{1}{2}(\ln e-\ln a)=\ln\sqrt{\frac{e}{a}}$$

Ejemplo 44. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1}$.

Solución

Este límite es de la forma 1^{∞}. Para calcularlo, utilizamos la estrategia presentada en el caso 3 de límites exponenciales. De este modo, se tiene

Sea $\alpha(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}-1\Rightarrow\alpha(x)=\dfrac{3x^2+4}{x^3+2x-5}\wedge\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$

Luego, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^3+2x-5}(x+1)}=e^3$$

Ejemplo 45. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}3x}}$.

Solución

Este límite es de la forma 1^{∞}. Utilizando el mismo argumento que en el ejemplo anterior, tenemos

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\ \text{ y }\ g(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}3x}$$

$$\alpha(x)=f(x)-1=\frac{2\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\ \text{ y }\ \lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}3x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{2\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}3x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}3x}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}3x}}=e^{\frac{2}{\operatorname{sen}a}}$$

Ejemplo 46. Calcule $L=\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right]^{1/x^2}$.

Solución

Para empezar, reescribiremos el límite como $L=\lim\limits_{x\to 0}(2-\sqrt{\cos x})^{1/2x^2}$.

El límite es de la forma 1^{∞}. Utilizando el argumento del tercer caso de límites exponenciales, se obtiene

$$f(x)=2-\sqrt{\cos x},\ \ g(x)=\frac{1}{2x^2},\ \ \alpha(x)=f(x)-1=1-\sqrt{\cos x}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\sqrt{\cos x}\right]^{\frac{1}{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(1-\sqrt{\cos x})\right]^{\frac{1}{2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x^2}}=e^{1/8}$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 47. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt[3]{\cos(ax)})}{bx^2}$.

Solución

Reescribiendo la expresión del límite, se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt[3]{\cos(ax)})}{bx^2}=\lim_{x\to 0}\ln[\cos ax]^{1/3bx^2}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{1/3bx^2}\right]$$

El límite es de la forma 1^∞. Aplicando el tercer caso de límites exponenciales, se obtiene

$$\lim_{x\to 0}[\cos(ax)]^{\frac{1}{3bx^2}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos ax-1)]^{\frac{1}{3bx^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{3bx^2}}=e^{-\frac{a^2}{6b}}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt[3]{\cos ax}}{bx^2}=\ln(e^{-a^2/6b})=-\frac{a^2}{6b}$$

Ejemplo 48. Calcule $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac{3a}{x}}\right)^{4x}$.

Solución

Este límite es de la forma 1^∞. Para calcular este límite, primeramente hacemos un cambio de variable y luego utilizamos el argumento del tercer caso de límites exponenciales. De este modo, tenemos

Sea $z=\sqrt{\dfrac{3a}{x}}\Rightarrow z^2=\dfrac{3a}{x}$ ó $x=\dfrac{3a}{z^2}$. Luego, si $x\to+\infty \implies z\to 0^+$

Aplicando el tercer caso de límites exponenciales, se tiene

$$L=\lim_{z\to 0^+}[\cos z]^{\frac{12a}{z^2}}=\lim_{z\to 0^+}[1+(\cos z-1)]^{\frac{12a}{z^2}}=e^{\lim\limits_{z\to 0^+}\frac{12a(\cos z-1)}{z^2}}=e^{-6a}$$

Ejemplo 49. Calcule

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-e^{bx})\ln(x^2+1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\arctan(\pi x^2)}{x^2\sqrt{x^2+1}\tan(\pi x^2)\operatorname{sen}(b-a)x},\quad a\neq b$$

Solución

Este límite es de la forma 0/0. Para empezar, reescribimos el límite como

$$L=\lim_{x\to 0}\left[e^{bx}\cdot\frac{e^{(a-b)x}-1}{x}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\cdot\frac{\frac{\arctan(\pi x^2)}{x^2}}{\frac{\tan(\pi x^2)}{x^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(b-a)x}{x}}\right]$$

Calculando cada uno de los límites separadamente, se obtiene

$$L=\frac{\pi(a-b)}{\pi(b-a)}=-1$$

EJERCICIOS

1) Determinar, según la base, cuáles de las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x)=3^x$ b) $f(x)=4^{-x}$

c) $f(x)=\log_\pi x$ d) $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$

e) $f(x)=\log_{e/4} x$ f) $f(x)=2^{-x}$

2) Sombree la región determinada por las siguientes relaciones.

a) $R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y<e^x,\ y-4x-1<0\}$

b) $R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y\geq 0,\ x\leq e,\ y\leq\ln x\}$

3) Si $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, pruebe que $f(a)+f(b)=-f\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)$.

4) Demuestre

a) $\ln|\csc x-\cot x|=-\ln|\csc x+\cot x|$.

b) Si $f(x)=-\ln|\csc x+\cot x|$, entonces $e^{3\ln\sqrt[3]{f(x)}}=\left|\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right|$.

5) Si $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ y $g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, demuestre

a) $f(x)+f(y)=2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)g\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

b) $g(x)+g(y)=2g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)g\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

c) $\dfrac{g(2x)+g(4y)}{f(2x)+f(4y)}=\left(\dfrac{g}{f}\right)(x+2y)$

d) $[f(x)+g(x)]^n=f(nx)+g(nx),\ n\in\mathbb{N}$ (usar inducción)

e) f es función impar y g es función par.

f) $\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2=\dfrac{g(x)-1}{2}$ y $\left[g\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2=\dfrac{g(x)+1}{2}$

g) $[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$

En los siguientes ejercicios, calcule los límites indicados (si existen).

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4}{\sqrt{16x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4x}\right)}}\right]^{x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3x}\right)}$ R. $\sqrt[3]{2}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right]^{x^2+2}$ R. e^2

www.FreeLibros.com

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{sen}3x)^{1/2x}$ R. $e^{-3/2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$ R. 1

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ R. $e^{-\frac{1}{2}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^4+3x^2+2x+1}{2x^4+5x+4}\right]^{\sqrt{x^2-3x}-x}$ R. 0

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{1+\operatorname{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)}}$ R. $e^{-\frac{5ab}{2}}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{5a}{x}}\right)\right]^{bx}$ R. $e^{-\frac{15ab}{2}}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$ R. 1

15) $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}\right]$ R. $\dfrac{1}{x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x+a\operatorname{sen}bx]^{\frac{1}{x}}$ R. e^{ab}

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}\right]$ R. $\alpha-\beta$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\operatorname{sen}(\alpha x)-\operatorname{sen}(\beta x)}$ R. 1

19) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{m/x}$ R. e^{2m}

20) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}$ R. $e^{2/\pi}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(e^x+x)^{\tan x}}{(1+\operatorname{sen}x)^x}\right]^{(\cot x)/x}$ R. e

22) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}-1}{x}$ R. $+\infty$

23) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1/x^2}$ R. 1

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^{\sqrt{x^2+x}}$ $(0<a<1)$ R. 0

25) $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{1-x}}$ R. 0

26) $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x}$ R. $\nexists$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$ R. e

28) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(x\sqrt{n})^3\cos x}{n\sqrt{n}\left(\sec x\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{\csc x}\right)}\right]^{x+2}$ R. 4

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ R. 1

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{\ln(1+x)}$ R. a

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$ R. a

32) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\ln x-\ln a}$ R. a

33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$ R. $\dfrac{a}{b}$

34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ R. $\dfrac{1}{2}$

35) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{\ln(x^n)-\ln(a^n)}$ R. a^n

8.11 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Proposición 13. Las funciones exponenciales y logarítmicas son derivables en sus dominios correspondientes. Se cumple:

a) $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, entonces $f'(x)=a^x\cdot\ln a$, $\forall x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, entonces $f'(x)=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

c) $f(x)=\log_a x$, $x>0$, entonces $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$, $\forall x>0$

d) $f(x)=\ln x$, $x>0$, entonces $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x>0$

e) $f(x)=\ln|x|$, $x\neq 0$, entonces $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\neq 0$

Demostración

a) Si $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, por definición de la derivada, se tiene

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$

b) Si $f(x)=e^x$ es un caso particular de la función exponencial general, entonces $f'(x)=e^x\ln e=e^x$.

c) Sea $f(x)=y=\log_a x$, $x>0$, entonces $x=a^y$

Derivando implícitamente la última igualdad respecto a x, tenemos

$1=a^y\cdot\ln a\cdot y'$, de donde $y'=\dfrac{1}{a^y\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}$

Por lo tanto, si $f(x)=\log_a x$, entonces $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

d) y e) se dejan como ejercicio para el lector.

Corolario. Si $u=u(x)$ y $v=v(x)$ son dos funciones derivables con respecto a la variable x, entonces se tiene

a) $D_x(e^u)=e^u\cdot D_x(u)$

b) $D_x(a^u)=a^u\cdot\ln a\cdot D_x(u)$

c) $D_x(\ln u)=\dfrac{1}{u}\cdot D_x(u)$

d) $D_x(\log_a u)=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot D_x(u)$

e) $D_x(u^v)=u^v\left[\ln u\cdot D_x(v)+\dfrac{v}{u}\cdot D_x(u)\right]=u^v\cdot(v\ln u)'$

f) $D_x(\ln|u|)=\dfrac{1}{u}\cdot D_x u$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 50. Si $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$, calcule $f'(x)$ y $D_{f'}$.

Solución

El dominio de la función es

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} > 0\right\} = [0;1)$$

Como $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x})$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{x})}(\sqrt{x}+1)' - \frac{1}{1-\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})},$$

$$D_{f'} = <0;1>$$

Ejemplo 51. Si $f(x) = e^{\cos x}$, calcule

a) $f'(x)$ b) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c) $f(f'(x))$

Solución

a) $f'(x) = e^{\cos x}(\cos x)' = -e^{\cos x}\cdot \operatorname{sen} x$

b) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{\cos \pi/2} = -1$

c) $f(f'(x)) = e^{\cos(-\operatorname{sen} x\cdot e^{\cos x})} = e^{\cos(e^{\cos x}\operatorname{sen} x)}$

Ejemplo 52. Sea $f(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$. Halle $f'(x)$.

Solución

Por propiedad del logaritmo, tenemos

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

Entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 53. Sea $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}$, determine $f'(x)$.

Solución

Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x(x-1)e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Ejemplo 54. Si $f(x) = 4^{\operatorname{arcsen} x}$, halle

a) $f'(x)$ b) $f'(0)$

Solución

a) $f'(x) = 4^{\operatorname{arcsen} x}\cdot \ln 4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{4^{\operatorname{arcsen} x}\cdot \ln 4}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f'(0) = \ln 4$

Ejemplo 55. Si $e^{\sqrt{\frac{x}{y}}} - e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = e^7$, halle $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Solución

Derivando implícitamente, se tiene

$$e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left[\sqrt{\frac{x}{y}}\right]' - e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\left[\sqrt{\frac{y}{x}}\right]' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\sqrt{x/y}}\cdot\frac{y-xy'}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} - e^{\sqrt{y/x}}\cdot\frac{xy'-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-xy')\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}}{2y\sqrt{yx}} + \frac{e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}}{2x\sqrt{xy}}\right] = 0$$

Luego, $y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y'' = \dfrac{xy'-y}{x^2}$

$$\Leftrightarrow y'' = \frac{x\left(\frac{y}{x}\right)-y}{x^2} = 0$$

Por tanto, $y''' = 0$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 56. Sea $f(x) = (1 + x^2)^{\arctan x}$, calcule

a) $f'(x)$ b) $f'(0)$

Solución

a) Para empezar, reescribiremos la función como

$$f(x) = (1 + x^2)^{\arctan x} = e^{\arctan x \cdot \ln(1+x^2)}$$

Luego, aplicando la regla de la función exponencial, se tiene

$$f'(x) = e^{\arctan x \cdot \ln(1+x^2)}[\arctan x \cdot \ln(1 + x^2)]'$$

$$= (1 + x^2)^{\arctan x}\left[\frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} + \frac{2x \arctan x}{1 + x^2}\right]$$

b) $f'(0) = 0$.

Ejemplo 57. Dado $y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}}\right) + 2\arctan\sqrt{\operatorname{sen} x}$, halle $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución

Mediante las reglas de derivación, se deduce que

$$y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 + \sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 + \operatorname{sen} x)}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen} x)} + \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen}^2 x)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} x}.\cos x} = 2 \sec x\sqrt{\csc x}$$

$$y'' = 2\left[\sec x \cdot \frac{-\csc x \cot x}{2\sqrt{\csc x}} + \sqrt{\csc x} \sec x \tan x\right]$$

$$= \sec x\sqrt{\csc x}\,[2 \tan x - \cot x]$$

Ejemplo 58. Si $y = e^{x^{x^x}}$, halle $y' = \frac{dy}{dx}$.

Solución

La derivada de la función está dada por

$$y' = e^{x^{x^x}} \cdot x^{x^x}(x^x \ln x)'$$

$$= e^{x^{x^x}} \cdot x^{x^x} \cdot x^x\left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right]$$

Ejemplo 59. Determine los valores extremos relativos, los puntos de inflexión, y trace la gráfica de la función $f(x) = x^3 e^{4-2x^2}$.

Solución

i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) $f'(x) = x^2 e^{4-2x^2}(3 - 4x^2)$

Puntos críticos: $x = -\sqrt{3}/2$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}/2$

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$	−	decreciente	$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong -7{,}912$ mín.
$\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\rangle$	+	creciente	
$\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$	+	creciente	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong 7{,}912$ máx.
$\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\rangle$	−	decreciente	

iii) $f''(x) = 2x\, e^{4-2x^2}(8x^4 - 14x^2 + 3)$

Puntos críticos de inflexión: $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -\sqrt{6}/2\rangle$	−	∩	P. I. $\cong$ (−1,22; 2,4968
$\langle -\sqrt{6}/2; -1/2\rangle$	+	∪	P. I. $\cong$ −0,5; −4,1394)
$\langle -1/2; 0\rangle$	−	∩	P. I. $\cong$ (0; 0)
$\langle 0; 1/2\rangle$	+	∪	P. I. $\cong$ (0,5; 4,1394)
$\langle 1/2; \sqrt{6}/2\rangle$	−	∩	P. I. $\cong$ (1,22; 2,4968)
$\langle \sqrt{6}/2; +\infty\rangle$	+	∪	

Se observa que f es una función impar. Su gráfica se muestra en la Fig. 8.28.

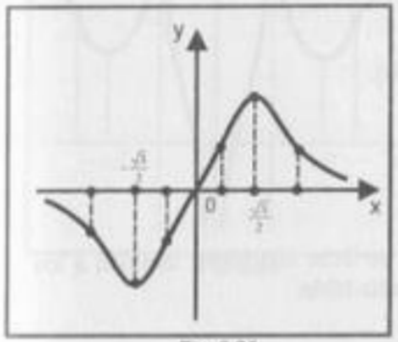


Fig. 8.28

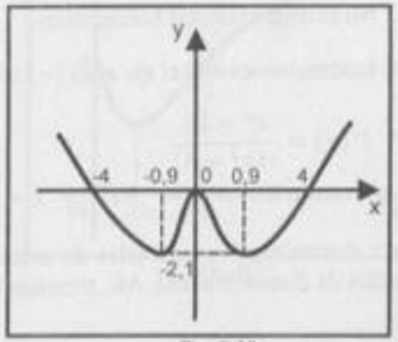


Fig. 8.29

www.FreeLibros.com

Ejemplo 60. Trace la gráfica de

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^4+1}{16x^2+1}\right)$$

e indique sus valores extremos relativos.

Solución

i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) $f'(x) = \dfrac{4x(8x^4+x^2-8)}{(x^4+1)(16x^2+1)}$

Puntos críticos: $x = -\alpha$, $x = 0$ y $x = \alpha$, donde $\alpha \cong 0{,}939451$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -\alpha\rangle$	$-$	decreciente	mín. $(-0{,}9; -2{,}14)$
$\langle -\alpha; 0\rangle$	$+$	creciente	máx. $(0; 0)$
$\langle 0; \alpha\rangle$	$-$	decreciente	mín. $(0{,}9; -2{,}14)$
$\langle \alpha; +\infty\rangle$	$+$	creciente	

Como $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{16x^2+1}\right)$ es función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y (Fig. 8.29). La gráfica corta al eje x en los puntos $(-4; 0)$, $(0; 0)$ y $(4; 0)$.

Ejemplo 61. Trace la gráfica de $f(x) = \ln\left|\dfrac{3x^3}{x^2-4}\right|$.

Solución

i) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

ii) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Luego, las asíntotas verticales son: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

No existen asíntotas horizontales.

iii) Intersecciones con el eje x en $(-1; 0)$ y $(1; 0)$.

iv) $f'(x) = \dfrac{x^2-12}{x(x^2-4)}$

Puntos críticos: $x = -2\sqrt{3}$ y $x = 2\sqrt{3}$.

Para determinar los intervalos de crecimiento, se debe considerar también a los puntos de discontinuidad. Así, tenemos la siguiente tabla:

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -2\sqrt{3}\rangle$	$-$	decreciente	mín. en $x = -2\sqrt{3}$
$\langle -2\sqrt{3}; -2\rangle$	$+$	creciente	
$\langle -2; 0\rangle$	$-$	decreciente	
$\langle 0; 2\rangle$	$+$	creciente	
$\langle 2; 2\sqrt{3}\rangle$	$-$	decreciente	mín. en $x = 2\sqrt{3}$
$\langle 2\sqrt{3}; +\infty\rangle$	$+$	creciente	

v) $f''(x) = \dfrac{32x^2 - x^4 - 48}{x^2(x^2-4)^2}$

Puntos críticos de inflexión: $x = -\gamma$, $x = -\beta$, $x = \gamma$ y $x = \beta$, donde

$\gamma = \sqrt{16+\sqrt{208}} \cong 5{,}51$ y $\beta = \sqrt{16-\sqrt{208}} \cong 1{,}25$

El análisis de los signos de $f''(x)$ se muestra en la siguiente tabla:

Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad	Puntos de Inflexión
$\langle -\infty; -\gamma\rangle$	$-$	$\cap$	P. I. en $x = -5{,}51$
$\langle -\gamma; -2\rangle$	$+$	$\cup$	
$\langle -2; -\beta\rangle$	$+$	$\cup$	P. I. en $x = -1{,}25$
$\langle -\beta; 0\rangle$	$-$	$\cap$	
$\langle 0; \beta\rangle$	$-$	$\cap$	P. I. en $x = 1{,}25$
$\langle \beta; 2\rangle$	$+$	$\cup$	
$\langle 2; \gamma\rangle$	$+$	$\cup$	P. I. en $x = 5{,}51$
$\langle \gamma; +\infty\rangle$	$-$	$\cap$	

vi) Se observa que f es función par. Su gráfica se muestra en la figura 8.30.

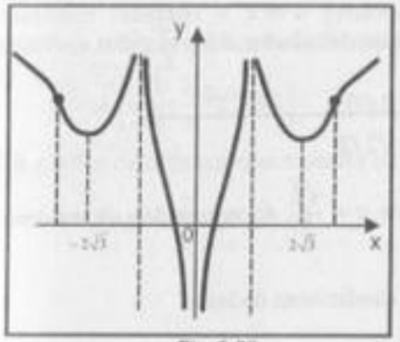


Fig. 8.30

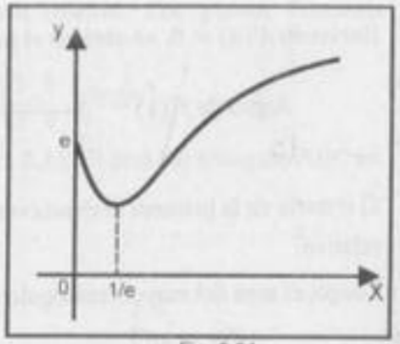


Fig. 8.31

www.FreeLibros.com

Ejemplo 62. Halle los puntos máximos y mínimos de $f(x) = e^{x^x}$.

Solución

i) $D_f = \langle 0; +\infty\rangle$

ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$, pues $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$. No tiene asíntotas verticales.

iii) $f'(x) = e^{x^x}x^x(\ln x + 1)$. Luego, $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

Punto crítico: $x = e^{-1}$

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle 0; e^{-1}\rangle$	$-$	decreciente	Mín. en $P(e^{-1}; e^{\frac{1}{e^{2}}})$
$\langle e^{-1}; +\infty\rangle$	$+$	creciente	

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Fig. 8.31.

Ejemplo 63. Halle el área del rectángulo más grande que tiene dos de sus vértices sobre la curva $y = 4e^{-x^2} - 4$ y el otro lado sobre la recta $y = -4$.

Solución

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -4$, $y = -4$ es asíntota horizontal de $y = f(x)$.

La Fig. 8.32 muestra el rectángulo que tiene un lado sobre la recta $y = -4$ y dos vértices sobre la gráfica $y = f(x) = 4e^{-x^2} - 4$. El á ea del rectángulo cuyo largo mide $2a$ $(a > 0)$ y altura $h = f(a) - (-4) = 4e^{-a^2}$ está dado por

$$A(a) = 2a\left(4e^{-a^2}\right) = 8ae^{-a^2}, \quad a > 0$$

La derivada de $A(a)$ con respecto de a es

$$A'(a) = 8e^{-a^2}(1 - 2a^2)$$

Haciendo $A'(a) = 0$, se obtiene el punto crítico de interés: $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Signo de $f'(x)$: $+$ en $\langle 0; \sqrt{2}/2\rangle$, $-$ a partir de $\sqrt{2}/2$

El criterio de la primera derivada verifica que $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde a un máximo relativo.

Luego, el área del mayor rectángulo con las condiciones dadas es

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{e}}u^2$$

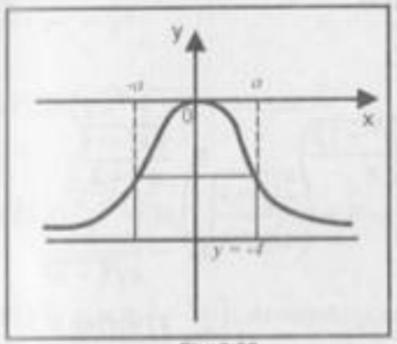


Fig. 8.32

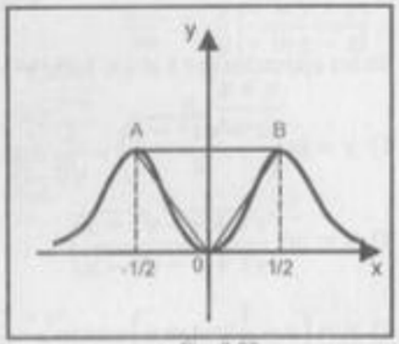


Fig. 8.33

Ejemplo 64. Halle el área del triángulo que tiene como vértices los puntos extremos relativos de la función $f(x) = x^2 2^{8-\frac{4}{\ln 2}x^2}$.

Solución

La derivada de f es

$$f'(x) = 2x2^{8-\frac{4}{\ln 2}x^2}(1 - 4x^2)$$

Puntos críticos: $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

Signo de $f'(x)$: $+$ hasta $-1/2$, $-$ entre $-1/2$ y 0, $+$ entre 0 y $1/2$, $-$ a partir de $1/2$

El criterio de la primera derivada verifica que $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{1}{2}$ producen máximos relativos y $x = 0$ produce mínimo relativo. Los puntos extremos relativos sobre la gráfica de la función son:

$$A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\cdot 2^{8-\frac{1}{\ln 2}}\right),\ B(0;0)\ \text{y}\ C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\cdot 2^{8-\frac{1}{\ln 2}}\right)$$

La gráfica de la función se muestra en la figura 8.33. El área del triángulo ABC es

$$\text{Área} = \frac{1}{8}\cdot 2^{8-\frac{1}{\ln 2}}u^2$$

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 18, halle $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

1) $y = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3a^2-12}}{x}\right)$ R. $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3}$

2) $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$ R. $-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\arctan x\right)\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ R. $\dfrac{x^2 \arctan x}{1+x^2}$

4) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{1/6} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ R. $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$

5) $y = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{2x}+x^2}{1-\sqrt{2x}+x^2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2x}}{1-x^2}\right)$ R. $\dfrac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$

6) $y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[\arctan(1+\sqrt{2}x) - \arctan(1-\sqrt{2}x)]$

R. $\dfrac{x^2}{1+x^4}$

7) $y = \ln|\sec x + \tan x|$ R. $\sec x$

8) $y = -\dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ R. $\csc^3 x$

9) $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right]$ R. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

10) $y = \dfrac{n}{2}\ln|x^2-a^2| + \dfrac{m}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ R. $\dfrac{nx+m}{x^2-a^2}$

11) $y = \dfrac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)]$ R. $\operatorname{sen}(\ln x)$

12) $y = (\operatorname{sen} x)^x$

13) $y = x^{x^{e^x}}$

14) $y = x^{e^x}$

15) $y = x^{x^x}$

16) $x^y = y^x$ R. $\dfrac{y}{x}\left[\dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\right]$

17) $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \arctan\dfrac{y}{x}$ R. $\dfrac{x+y}{x-y}$

18) $e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}} + \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}}\right) = 8$ R. $y' = \dfrac{2y}{x}$

19) Si $y = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$, demuestre que $xy' + 1 = e^y$.

20) Si $u = \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{(y+1)^2}{y^2-y+1}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)$, donde $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}{x}$,

demuestre que $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{xy(1+x)}$.

21) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(-1) = 4$, $g'(-1) = 4$. Calcule:

a) $F'(x)$ y $F'(0)$, si $F(x) = 2^x g(x^2-1)$.

b) $G'(x)$ y $G'(0)$, si $G(x) = \ln(1+2x)\, g(1-2e^x)$.

En los ejercicios del 22 al 25, halle las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a las curvas dadas en los puntos indicados.

22) $y = x^2 e^{-x}$, $x = 1$ R. L_T: $x - ey = 0$, L_N: $e^2 x + ey - 1 - e^2 = 0$

23) $y = x^{-2} e^{2x}$, $x = -1$

24) $y = \ln x$, $x = e$

25) $y = x\ln x$, $x = e$ R. L_T: $2x - y = e$, L_N: $x + 2y = 3e$

26) Halle la derivada del orden indicado para las siguientes funciones:

a) $y = \ln(ax+b)$, $y^{(n)}$ R. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$

b) $y = e^{x\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha)$, $y^{(n)}$ R. $y^{(n)} = e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha + n\alpha)$

c) $y = e^{-x}\cos x$, $y^{(4)}$ R. $y^{(4)} = -4y$

www.FreeLibros.com

d) $(\sqrt{2})^{\sqrt{\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}}} + \ln\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}\right) = 10$ R. $y^{(n)} = 0\,,\ n \geq 3$

27) Si $f(x) = (\sqrt{5})^{\operatorname{arccot} x^2 - \arctan x^2}$, halle $f'(1)$. R. $-\ln 5$

En los siguientes ejercicios, hasta el N° 36, determine los intervalos de crecimiento, los de decrecimiento y los valores extremos de las funciones que se indican.

28) $f(x) = e^{-x^2+2x}$ R. Máx en $x = 1$

29) $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ R. Máx en $x = e^{-1/2}$

30) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ R. Mín en $x = 2$

31) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x\,, x \in [0; 2\pi]$ R. Máx en $x = \dfrac{3\pi}{4}$, mín en $x = \dfrac{7\pi}{4}$

32) $f(x) = x^x$

33) $f(x) = x \ln^2 x$

34) $f(x) = e^{x^{x^x}}$

35) $f(x) = 3^{x^{x^2}}$

36) $f(x) = \dfrac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)]$

R. $\begin{cases} \text{Máx en } \left(e^{\alpha}; \dfrac{e^{\alpha}}{2}\right),\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{Mín en } \left(e^{\beta}; \dfrac{e^{\beta}}{2}\right),\ \beta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, hasta el N° 51, halle los valores máximos, valores mínimos, puntos de inflexión (si existen) y trace la gráfica de cada una de las funciones que se indican.

37) $f(x) = \ln(8x - x^2)$ R. Máx. $f(4) = \ln 16$

38) $f(x) = x^2 \ln x$ R. Mín. $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$; P.I. $\left(e^{-3/2}; \dfrac{-3}{2}e^{-3}\right)$

39) $f(x) = x^2 e^{-x}$ R. Máx. $(2; 4e^{-2})$; Mín $(0;0)$; P.I. en $x = 2 + \sqrt{2}$

40) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

41) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}$

42) $f(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x\,,\ x \in [0; 2\pi]$ R. P.I. en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$

43) $f(x) = x^3 e^{1/x}$ R. Mín. en $x = \dfrac{1}{3}$

44) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+2}{x^3+1}\right|$

45) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4}{1-x}\right)$

46) $f(x) = x^4 e^{8-2x^2}$

47) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}}\right)$

48) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x^3}{x-1}\right|$

49) $f(x) = x^2 - 4\ln(x^2)$

50) $f(x) = x - \ln(8x^2 - x^4)$

51) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 1}\right)$

52) Se obtiene un tubo al girar la función $y = e^{4x}$, $-10 \leq x \leq 10$, alrededor de la recta $y = x$ ¿Cuál es el radio de la mayor esfera que puede pasar por ese tubo?

53) Una compañía, que crece de forma acelerada, estima que el número de sus empleados $N(t)$, después de t años, estará dado por el modelo $N(t) = 100000(0{,}04)^{(0{,}5)^t}$.

a) ¿Cuántos empleados tiene inicialmente la compañía? R. 4000

b) ¿Al cabo de cuántos años se triplicará su fuerza laboral?

c) ¿Cuál es el tope del número de sus empleados? R. 100000

www.FreeLibros.com

54) En el restaurante "Las Brisas de Mayami", el número promedio $N(x)$ de clientes para el almuerzo depende del precio x (en nuevos soles) del menú del día, según el modelo:

$$N(x) = \frac{3500}{x^2}\left(1 + \ln\left(\frac{x}{10}\right)\right) \quad , \ x \geq 3$$

a) ¿A qué precio debe vender el menú del día para maximizar el número de clientes? ¿Cuál es el número máximo de clientes para ese precio? (Exprese los resultados en números enteros)

b) ¿A qué precio debe vender el menú del día para maximizar su ingreso total del día? ¿Cuál es su ingreso total para ese precio?

R. a) S/.6; 48 b) S/.10; S/.350

55) La editorial PALLANCOS S.A. produce libros de matemática a un costo de S/. 10 cada uno, y estima que si se venden a x nuevos soles la unidad, los estudiantes comprarán aproximadamente $2000e^{-0{,}04x}$ libros por mes.

a) ¿A qué precio deberá vender cada libro para maximizar su ingreso total?

b) ¿A qué precio deberá vender cada libro para maximizar su utilidad?

R. a) S/.25 b) S/.35

56) La imprenta THALES S.A. puede vender las facturas que produce a un precio de 50 nuevos soles el millar. El costo de producir x millares al mes (en nuevos soles) es

$$C(x) = 10x\ln x + 15$$

¿Cuántos millares de facturas debe producir la imprenta al mes para maximizar su utilidad? R. 55 millares

57) La temperatura en grados Celsius en la ciudad de Ica durante un día promedio de verano varía aproximadamente de acuerdo al modelo

$$T(t) = 30e^{-\left(1-\frac{t}{9}\right)^2} \ , \ 0 \leq t \leq 18$$

donde t es el tiempo en horas medido a partir de las 6:00 a.m ($t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m.).

¿A qué hora del día la temperatura de la ciudad de Ica es máxima?

R. 3:00 p.m.

58) La editorial MITOGRAMA S.A. estima que el costo de producir x ejemplares del libro de Cálculo I se modela por la función

$$C(x) = 2x\ln\left(\frac{x}{8e}\right) \ , \ x > 0$$

Si la editorial puede vender a 16 nuevos soles cada libro que produce, ¿cuántos libros debe producir para maximizar su utilidad?

R. 23848 libros

www.FreeLibros.com

59) Jaimito adquiere gran número de conocimientos del Cálculo Diferencial cuando se prepara para el examen final del curso de Cálculo I. En un tiempo de t semanas después del examen final, el porcentaje de los conocimientos que Jaimito es capaz de recordar está dado por el modelo

$$P(t) = \frac{175 + 25e^{0.4t}}{1 + e^{0.4t}}$$

a) Calcule $P(0)$ y $P(5)$ e interprete el resultado.

R. $P(0) = 100$ y $P(5) = 42{,}88$

b) Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ e interprete el resultado. R. 25

c) El porcentaje de conocimientos del cálculo diferencial que Jaimito recuerda a través del tiempo, ¿está decreciendo? R. Si

60) La base de un triángulo es $\overline{AB}$ y su altura es $h = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4+\ln x}}$. Si A es el punto de intersección de la asíntota horizontal de $f(x) = \ln\left(e - \frac{1}{x}\right)$ con el punto de valor máximo relativo de abscisa negativa de $g(x) = 2|x| - x^2$ y B es el máximo relativo de $h(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2} + 2$, determine el área del triángulo.

61) Dadas las funciones

$$f(x) = 10\, e^{x^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}}$$

$$g(x) = -\left[2^{\left[\frac{1}{\ln 2}x^{1/3}(x-6)^{2/3}\right]}\right]$$

$$h(x) = \tan(x+6) + 10 \ , \ x \in [-7; -5]$$

$$j(x) = \arctan\left[(x+12)^{2/3}x^{1/3}\right] - 1$$

Halle el área del trapecio isósceles con bases paralelas al eje x, de modo que el primer vértice es el máximo relativo de $j(x)$, el segundo es el punto de inflexión de $h(x)$, el tercero es el punto máximo local de $f(x)$ y el cuarto es el punto máximo relativo de $g(x)$.

R. 132 u^2

En los ejercicios del 62 al 71, trace la gráfica de las funciones dadas e indique sus valores extremos relativos y asíntotas.

62) $$f(x) = \begin{cases} e^{(x+4)^{3/5}(x-3)^4} - 1, & \text{si } x \leq -4 \\ (x+4)^{2/3}(x-3)^2, & \text{si } -4 < x \leq 3 \\ 3^{-(x-3)^{2/9}(x-8)^{3/5}} - 1, & \text{si } 3 < x \leq 8 \\ \dfrac{x^2 - 9x + 8}{x^2 + 9x + 8}, & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

63) $f(x) = (\text{sen } x)^{\text{sen } x}$

64) $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

65) $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{8-2x^2}, & \text{si } x \leq C \\ \arctan\left[x \cdot |x-3|^{3/5}\right], & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \text{arccot}\left[\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x^2 + 1}\right], & \text{si } 3 < x \leq 8 \\ (x-8)^{3/5}(x+5)^{2/5}, & \text{si } x > 8 \end{cases}$

66) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^{2/5} e^{(x+2)^{3/5}} - 2, & \text{si } x \leq -2 \\ 3^{\frac{x^2-4}{x^2+4}} - 3, & \text{si } -2 < x < 2 \\ \arctan\left[e^{(x-2)^{1/3}(x-7)^{2/3}} - 1\right] - 2, & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 10^{-\frac{x^2-8x+7}{x^2+8x+7}} - 3, & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$

67) $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^{1/5}(x+3)^{4/5}, & \text{si } x \leq -3 \\ \text{arccot}\left[3^{(x+3)^{1/3}(x-2)^{2/3}} - 1\right] - \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } -3 < x < 2 \\ e^{\arctan\left[(x-2)^{3/7}(x-8)^{3/7}\right]} - 1, & \text{si } 2 \leq x \leq 8 \\ x^5 e^{16-10x^2} - 32768, & \text{si } x > 8 \end{cases}$

68) $f(x) = \ln\left[\text{arcsen}\left(\dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 10x + 9}\right)\right]$

69) $f(x) = \ln\left[\arctan\left(\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}\right)\right]$

70) $f(x) = \text{arcsen}[\ln^2(x+1)]$

71) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{1 - x^2}\right)$

www.FreeLibros.com

9 FORMAS INDETERMINADAS Y FUNCIONES HIPERBÓLICAS

En este capítulo trataremos las reglas de L'Hôpital, las cuales se emplean para calcular límites de ciertas formas indeterminadas, y las funciones hiperbólicas, que sirven para modelar algunas situaciones que involucran e^x y e^{-x}.

9.1 TEOREMA DE CAUCHY – REGLAS DE L'HÔPITAL

Teorema de Cauchy. Si las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son:

a) Continuas en el intervalo $[a; b]$

b) Derivables en $\langle a; b\rangle$

c) $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in \langle a; b\rangle$

Entonces, existe por lo menos un punto $c \in \langle a; b\rangle$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración

Se observa que $g(a) \neq g(b)$, pues si $g(a) = g(b)$, entonces g cumpliría las condiciones del Teorema de Rolle y existiría $c \in \langle a; b\rangle$ tal que $g'(c) = 0$.

Sea $\qquad K = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (1)$

Entonces, $f(b) - f(a) - K[g(b) - g(a)] = 0$.

Consideremos la función auxiliar $F(x)$ definida por

$$F(x) = f(x) - f(a) - K[g(x) - g(a)], \ x \in [a; b]$$

Tenemos que F es continua en $[a; b]$, derivable en $\langle a; b\rangle$ y $F(b) = F(a) = 0$. Entonces, F satisface las condiciones del teorema de Rolle y, por tanto, existe $c \in \langle a; b\rangle$ tal que $F'(c) = f'(c) - Kg'(c) = 0$.

Como $g'(c) \neq 0$, se tiene $K = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$

Finalmente, de (1) y (2) se obtiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \ c \in \langle a; b\rangle$$

Teorema 1 (Primera Regla De L'Hôpital: Forma $\frac{0}{0}$)

Si las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son:

a) Continuas en el intervalo $[a; a+h]$, $h > 0$

b) Derivables en $\langle a; a+h \rangle$

c) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle a; a+h \rangle$

d) $f(a) = g(a) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (ó $\pm\infty$)

Entonces, $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (ó $\pm\infty$)

Demostración

Se observa que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle a; a+h \rangle$, pues si $x \in \langle a; a+h \rangle$, aplicando el T.V.M. a la función g en el intervalo $[a; x]$, se obtiene

$$g(x) - g(a) = (x-a)g'(c),\ (a < c < x)$$

Puesto que $g(a) = 0$ y $g'(c) \neq 0$ (hipótesis (d) y (c)), se tiene

$$g(x) = (x-a)g'(c) \neq 0,\ \forall x \in \langle a; a+h \rangle$$

En virtud de lo anterior, consideremos el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ para $x \in \langle a; a+h \rangle$.

Como $f(a) = g(a) = 0$, el teorema de Cauchy nos permite escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(d)}{g'(d)},\quad a < d < x$$

Se observa que cuando $x \to a^+ \Rightarrow d \to a^+$. Luego, en virtud de (e):

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{d\to a^+} \frac{f'(d)}{g'(d)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Corolario 1

Si las condiciones del teorema se verifican en un intervalo $[a-h; a]$ (ó $[a-h; a+h]$), el teorema es verdadero cuando $x \to a^-$ (ó cuando $x \to a$).

Corolario 2

Si las condiciones a), b) y c) se verifican en el intervalo $\left[\frac{1}{h}; +\infty\right)$ $\left(\text{ó } \left(-\infty; -\frac{1}{h}\right]\right)$ y

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ $\left(\text{ó } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0\right)$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \left(\text{ó } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

siempre que el límite del segundo término exista.

www.FreeLibros.com

Demostración

Si $x \to +\infty$, reemplazando $x = \frac{1}{t}$, las dos funciones $f\left(\frac{1}{t}\right)$ y $g\left(\frac{1}{t}\right)$ tienen límite cero cuando $t \to 0^+$.

Definiendo $f\left(\frac{1}{t}\right) = g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ para $t = 0$, obtenemos dos funciones continuas en el intervalo $[0; h]$ que verifican las condiciones del teorema 1.

Aplicando este teorema, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0^+} \frac{\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]'} = \lim_{t\to0^+} \frac{-t^{-2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-t^{-2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

De manera similar, se demuestra cuando $x \to -\infty$. En las aplicaciones no es necesario hacer la sustitución.

Corolario 3

Si $f'(a) = g'(a) = 0$ y f', g' satisfacen las condiciones del teorema 1, entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

siempre que el último límite existe. De esta manera, podemos continuar con el método si la indeterminación persiste.

Observación 1

Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no tiene límite cuando $x \to a$, no podemos concluir que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tampoco tiene.

Por ejemplo, las funciones $g(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

son tales que

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$ *no existe.*

Teorema 2 (Segunda Regla De L'Hôpital: Forma $\frac{\infty}{\infty}$)

Si dos funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son:

a) Continuas en $\langle a; a+h]$

b) Derivables en $\langle a; a+h\rangle$

c) $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in \langle a; a+h\rangle$

d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

e) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (ó $\pm\infty$)

Entonces, $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (ó $\pm\infty$)

Demostración (Ejercicio para el lector)

Observación 2

a) *Es fácil demostrar, usando el T.V.M., que si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, *entonces* $\lim_{x\to a} f'(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to a} g'(x) = \infty$. *Esto significa que en un cierto subconjunto del dominio de* f, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *es nuevamente indeterminado si* $x \to a$. *Sin embargo, el cociente* $\frac{f'}{g'}$ *puede permitir simplificaciones que* $\frac{f}{g}$ *no permite y, por tanto, facilita el cálculo del límite correspondiente.*

Por ejemplo, al calcular $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1/4}}{\ln x}$ $\left(forma\ \frac{\infty}{\infty}\right)$, *se tiene*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1/4}}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}x^{-5/4}}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x^{-1/4}\right) = -\infty$$

b) *Para la forma* $\frac{\infty}{\infty}$ *se verifican los corolarios análogos a los de la forma* $\frac{0}{0}$.

c) *En la forma* $\frac{\infty}{\infty}$, *si* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *no existe, no se puede concluir que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *no existe.*

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x}$ *y* $g(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, *se cumple:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{-2}}{-x^{-2}\left[1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \quad (no\ existe)$$

No obstante, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{x^{-1}+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$ *(existe)*

Ejemplo 1. Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} - e^{3-x}}{\operatorname{sen}(x-3)}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} - e^{3-x}}{\operatorname{sen}(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} + e^{3-x}}{\cos(x-3)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Ejemplo 2. Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}{1-\cos(x-2)}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando dos veces la Regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}{1-\cos(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{\operatorname{sen}(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} + e^{2-x}}{\cos(x-2)} = 2$$

Ejemplo 3. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

Solución

El límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando reiteradamente la Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{12x^2} = -\frac{1}{24}$$

Ejemplo 4. Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x}$.

Solución

Cuando $x \to 0^+$, este límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}x^{-2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

Se observa que si continuamos con el proceso, no se podrá levantar la indeterminación. Por tanto, se puede reescribir como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \quad \left(\text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital al último límite, se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{-x^{-2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0 \qquad (1)$$

www.FreeLibros.com

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{-1/x}=-\infty\ [(-\infty)(+\infty)=-\infty]\quad (2)$$

Luego, de (1) y (2) se concluye que no existe $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x}$.

Ejemplo 5. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x^2}-1}{\frac{1}{x^2}}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x^2}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x^2}2x^{-3}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-1/x^2}\right)=-1$$

Ejemplo 6. Calcule $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{sen }x)}{\ln(\tan x)}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{sen }x)}{\ln(\tan x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x=1$$

Ejemplo 7. Calcule $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan(3x)}$.

Solución

Tenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\text{sen }x}{\text{sen }3x}\right)\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen }x}{\text{sen }3x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

El primer límite es -1 y el segundo límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L' Hôpital a este límite, se tiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\,\text{sen }3x}{-\,\text{sen }x}=-3$$

Por tanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=(-1)(-3)=3.$

Ejemplo 8. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

Solución

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Como $n\in\mathbb{N}$, aplicando sucesivamente (n veces) la Regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

Ejemplo 9. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}, \alpha>0$ y $\alpha\notin\mathbb{N}$.

Solución

Como α es un número real positivo, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n-1<\alpha<n$.

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital n veces, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{e^x}=0$$

pues $\alpha-n<0$. Este resultado muestra que cuando $x\to+\infty$, la exponencial e^x es un infinito de "orden mayor que cualquier potencia de x".

Si $\alpha\in\mathbb{N}$, el resultado es el mismo porque el límite tiene la misma indeterminación. Aplicando la Regla de L'Hôpital α veces, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha!}{e^x}=0$$

Ejemplo 10. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}, \alpha>0, \alpha\notin\mathbb{N}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$$

Este resultado muestra que cuando $x\to+\infty$, $\ln x$ es un infinito de "orden inferior al orden de x^α, si $\alpha>0$".

Por ejemplo, para $\alpha=1/3$ se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}x^{1/3}}=0$$

www.FreeLibros.com

9.2 FORMAS INDETERMINADAS REDUCIBLES A $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Las Reglas de L'Hôpital solo se aplican a las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, las otras formas indeterminadas se reducen a éstas mediante transformaciones algebraicas simples. Estas formas son las siguientes:

I) $0\cdot\infty$ II) $\infty-\infty$ III) 0^0, ∞^0 y 1^∞

Para transformarlos a las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se procede del siguiente modo:

I) Forma $0\cdot\infty$

Esta forma de indeterminación se presenta cuando se calcula el límite del producto $f\cdot g$, donde

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ y } \lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad (a \text{ puede ser } \pm\infty)$$

Para calcular tal límite, se utiliza una de las siguientes trasformaciones, y luego se aplica la Regla de L'Hôpital.

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \left(\text{Forma } \frac{0}{0}\right) \quad (1)$$

$$f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}} \quad \left(\text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\right) \quad (2)$$

Observación 3

Cuando uno de los factores es una función trascendente con derivada algebraica (por ejemplo $\ln x$, $\arctan x$, $\text{arcsec}\, x$, *etc), conviene conservar ese factor como numerador. Por otro lado, los factores que poseen límites diferentes de cero pueden ser sustituidos directamente por estos.*

Ejemplo 11. Calcule $\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln(\text{sen}\, x)$.

Solución

Para aplicar la Regla de L'Hôpital a este límite, previamente se debe transformar a cociente. Considerando la observación 3, es conveniente dejar $\ln(\text{sen}\, x)$ como numerador, esto es,

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln(\text{sen}\, x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{sen}\, x)}{\cot x} \quad \left(\text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{-\csc^2 x}=-\lim_{x\to 0^+}\text{sen}\, x\cos x=0$$

II) Forma $\infty-\infty$

Esta forma se presenta cuando se calcula $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, donde

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

En este caso se utiliza la transformación

$$f-g=f\cdot g\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right) \quad (3)$$

que lo convierte a la forma indeterminada del tipo $0\cdot\infty$ y se aplica el caso I.

Ejemplo 12. Calcule $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)$.

Solución

Este límite es de la forma $\infty-\infty$. Utilizando la transformación (3), se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{x}\left(\frac{1}{\csc x}-\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\, x-x}{x\,\text{sen}\, x} \quad \left(\text{Forma } \frac{0}{0}\right)$$

Al aplicar la Regla de L'Hôpital al último cociente, se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\text{sen}\, x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\text{sen}\, x}{\cos x+\cos x-x\,\text{sen}\, x}=\frac{0}{2}=0$$

III) Formas 0^0, ∞^∞ y 1^∞

Los límites de estas 3 formas indeterminadas se reducen a la forma $0\cdot\infty$ al escribir la función dada como

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))} \quad (4)$$

El límite que se obtiene en el exponente es de la forma $0\cdot\infty$, por lo que se debe transformar a la forma 0/0 ó ∞/∞ para aplicar la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 13. Calcule $\lim_{x\to 0^+}(x+\text{sen}\, x)^{\tan x}$.

Solución

Aplicando (4), se tiene $\lim_{x\to 0^+}(x+\text{sen}\, x)^{\text{tg}\, x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\tan x\,\ln(x+\text{sen}\, x)}$.

Considerando la observación 3, el límite del exponente (forma $0\cdot\infty$) se transformará a la forma 0/0. En la solución de este ejemplo, se aplicará la recomendación dada en la observación antes indicada, en el sentido de que "los límites (de los factores) diferentes de cero deben ser reemplazados directamente por estos". Trabajando sólo con el límite del exponente, se tiene

www.FreeLibros.com

$$\lim_{x\to0^+}\tan x\,\ln(x+\operatorname{sen}x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen}x+x)}{\cot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen}x}}{-\csc^2x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}(1+\cos x)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2x}{x+\operatorname{sen}x}$$

$$=-2\lim_{x\to0^+}\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1+\cos x}=(-2)(0)=0$$

Por tanto, $\lim_{x\to0^+}(x+\operatorname{sen}x)^{\tan x}=e^0=1$.

Ejemplo 14. Calcule $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

Solución

Aplicando (4), tenemos $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln(\tan x)}$

Trabajando con el límite del exponente (es de la forma $0\cdot\infty$) y siguiendo las pautas dadas en el ejemplo anterior, se tiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\dfrac{\sec^2x}{\tan x}}{\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{(1)\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\operatorname{sen}x}=0$$

Por tanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=e^0=1$.

Ejemplo 15. Calcule $\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x\operatorname{sen}x}}$.

Solución

Aplicando (4), se tiene $\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x\operatorname{sen}x}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{sen}x}}$.

Como $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{sen}x}$ es de la forma $\dfrac{0}{0}$, se debe emplear la Regla de L'Hôpital.

Al aplicar dicha regla de forma reiterada, se obtiene

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{sen}x+x\cos x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{2}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x}=(1)(1)=1$$

Por tanto, $\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x\operatorname{sen}x}}=e$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 16. Calcule $\lim_{x\to0^+}x^x$.

Solución

Aplicando (4), se tiene $\lim_{x\to0^+}x^x=e^{\lim_{x\to0^+}x\ln x}$.

El límite $\lim_{x\to0^+}x\ln x$ es de la forma $0\cdot\infty$. Para aplicar la Regla de L'Hôpital se transforma a la forma ∞/∞ dejando $\ln x$ en el numerador.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Por tanto, $\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1$.

Ejemplo 17 Calcule

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}\,(a^x-x\ln a-\cos x)\operatorname{arcsen}(8x)\ln(1+x^2)}{x^{8/3}\operatorname{sen}^2x\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^3-x})}$$

Solución

Tenemos

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}\,(a^x-x\ln a-\cos x)\operatorname{arcsen}(8x)\ln(1+x^2)}{x^{8/3}\operatorname{sen}^2x\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^3-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[\dfrac{a^x-x\ln a-\cos x}{x^2}\right]8\left[\dfrac{\operatorname{arcsen}(8x)}{8x}\right]\cdot\left[\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]}{\left[\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right]^2\cdot\left[\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^3-x})}{\sqrt[3]{x^3-x}}\right]}$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital a los límites

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-x\ln a-\cos x}{x^2}=L_1\ \text{ y }\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=L_2$$

se obtiene $L_1=\dfrac{\ln^2a+1}{2}$ y $L_2=1$

Los otros límites son elementales y cada uno de ellos es igual a 1.

Por consiguiente, $L=\dfrac{\left(\dfrac{\ln^2a+1}{2}\right)8(1)(1)}{(1)(1)}=4(\ln^2a+1)$.

EJERCICIOS

Calcule los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ R. 1

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\text{sen}\,x}$ R. -2

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x(1+x)}$ R. 1

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-(a+1)^x}{x}$ R. $\ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\text{sen}(\pi x)}{x-\text{sen}(\pi x)}$ R. $\dfrac{1+\pi}{1-\pi}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$ R. $-1/2$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$ R. e^2

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{arcsen}\,x}{\text{sen}^3 x}$ R. $-1/6$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{nx}}{1-\cos(nx)}$ R. $\dfrac{2}{n}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-x\ln a-\cos x}{\text{sen}^2 x}$ R. $\dfrac{1}{2}(\ln^2 a+1)$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$ R. $\ln a-1$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ R. $+\infty$

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2\cos x}-x\tan x\right)$ R. 1

14) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^x)\ln(\text{sen}\,x)$ R. 0

15) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$ R. 1

16) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^{e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}}$ R. 1

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cos x}-\cot x\right)$ R. 0

18) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ R. 1

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{\text{sen}^2 x}$ R. 0

20) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x^2}$ R. 0

21) $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{1/x}$ R. 1

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ R. 1

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ R. 0

24) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln|x|)^2$ R. 0

25) $\lim\limits_{x\to 0}|\text{sen}\,x|^x$ R. 1

26) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+a^2)^{1/x^2}$ R. 1

27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ R. $\dfrac{1}{3}$

28) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ R. $\dfrac{1}{2}$

www.FreeLibros.com

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p\,\text{sen}\,x-\text{sen}(px)}{x(\cos x-\cos(px))}$ R. $\dfrac{p}{3}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\text{sen}(\text{sen}\,x)}{1-\cos(\text{sen}\,x)}$ R. 2

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2 x-\text{sen}(x^2)}{x^2}$ R. 0

32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\text{sen}\,x)-\cos x}{x^4}$ R. $\dfrac{1}{6}$

33) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ R. $\dfrac{1}{2}$

34) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}\,\text{sen}(x^{-1/2})$ R. 0

35) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\tan^2(x^{-1})}{\ln^2(1+4x^{-1})}$ R. $\dfrac{1}{16}$

36) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-2}-2\arctan(x^{-1})}{x^{-1}}$ R. -2

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+3x+5}{\text{sen}\,x}-\dfrac{5}{x}\right]$ R. 3

38) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\dfrac{5a}{x}\right]^{bx}$ R. 1

39) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1\right)\right]^{x\,\text{sen}\frac{1}{x}}$ R. 1

40) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{5}{1+2\ln x}}$ R. $e^{5/2}$

41) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}\,y+\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y-\text{sen}\,x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}\,x}}$ R. $e^{\frac{2}{\text{sen}\,y}}$

42) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\text{sen}\,x}\right)^{\frac{1}{\text{sen}\,x}}$ R. 1

43) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^4+3x^2+2x+1}{2x^4+5x+4}\right]^{\sqrt{x^2-2x}-x}$ R. 2

44) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(\ln x)^{2/3}+(1-x)^{3/4}}{[\text{sen}(x-1)]^{2/3}}$ R. 1

45) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$ R. $-1/2$

46) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt[3]{1+\text{sen}\,3x})^{\frac{1}{\text{sen}\sqrt{3x}}}$ R. 1

47) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2^{(x+1)^{3/5}}-1)\left[1-\cos[(x+1)^{7/9}]\right][\ln(x+2)]^{17/15}}{[5^{(x+1)^{7/3}}-1]\tan^3[(x+1)^{5/3}]\text{arcsen}[(x+1)^{14/9}]}$ R. $+\infty$

48) $\lim\limits_{a\to x}\dfrac{(a-x)^{13/15}\left[\cos(a-x)^{1/3}-\cos\left(\text{sen}\left(3(a-x)^{\frac{1}{3}}\right)\right]\text{sen}(2(a-x)^{2/3})\right.}{[e^{2(a-x)^{1/5}}]\text{sen}[3(a-x)^{2/3}]\left[1-\cos\left[\text{sen}(4(a-x)^{\frac{2}{3}})\right]\right]}$

R. 1/6

9.3 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las funciones hiperbólicas son combinaciones de e^x y e^{-x} y están definidas como sigue:

a) $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ **(seno hiperbólico)**

b) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ **(coseno hiperbólico)**

c) $f(x) = \tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ **(tangente hiperbólica)**

d) $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$ **(cotangente hiperbólica)**

e) $f(x) = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ **(secante hiperbólica)**

f) $f(x) = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$ **(cosecante hiperbólica)**

Con la ayuda de las derivadas y límites, podemos graficar fácilmente estas funciones. Sus gráficas se muestran en las siguientes figuras:

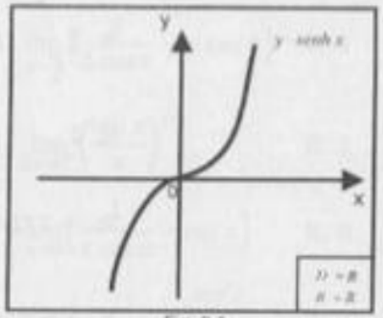


Fig. 9.1

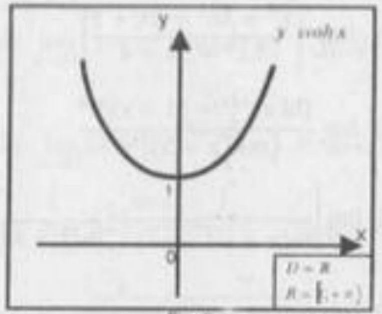


Fig. 9.2

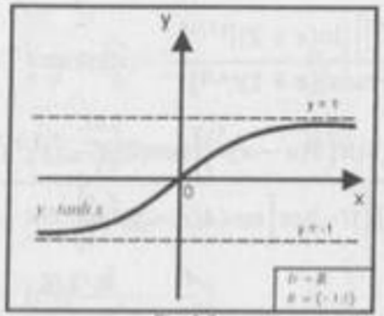


Fig. 9.3

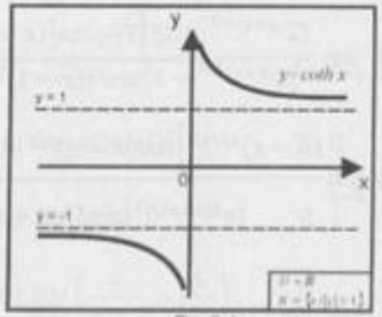


Fig. 9.4

www.FreeLibros.com

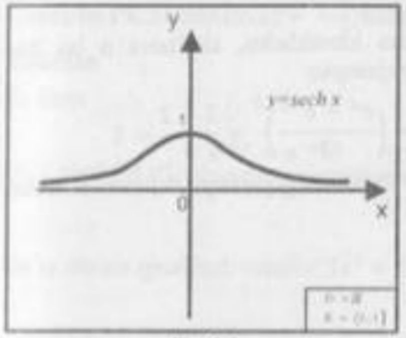


Fig. 9.5

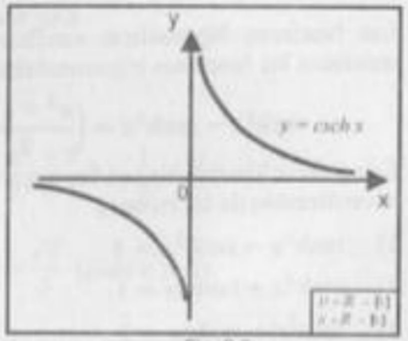


Fig. 9.6

PROPIEDADES

Algunas propiedades de las funciones hiperbólicas son:

1) a) $\operatorname{senh} 0 = 0$

   b) $\cosh 0 = 1$

   c) $\tanh 0 = 0$

2) Las funciones $f(x) = \operatorname{senh} x$, $g(x) = \tanh x$, $h(x) = \coth x$ y $j(x) = \operatorname{csch} x$ son impares en sus respectivos dominios.

3) Las funciones $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = \operatorname{sech} x$ son pares en sus dominios.

4) Los valores de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico están relacionados con las coordenadas de los puntos de una hipérbola equilátera, de manera similar a la que los valores de las correspondientes funciones trigonométricas están relacionados con las coordenadas de los puntos de una circunferencia (Fig. 9.7).

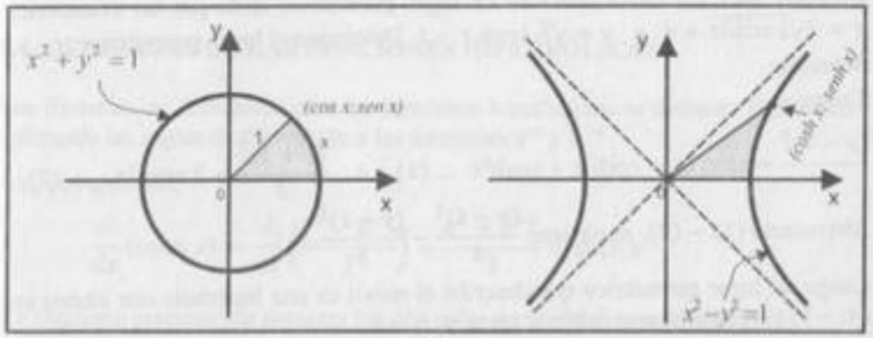


Fig. 9.7

9.3.1 IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

Las funciones hiperbólicas verifican ciertas identidades, similares a las que satisfacen las funciones trigonométricas. Por ejemplo:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2+2}{4} = 1$$

Ésta y otras identidades son las que a continuación se presentan, dejando al lector la verificación de las mismas.

1) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

2) $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

3) $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

4) $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

5) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

6) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

7) $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

8) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

9) $\operatorname{senh} a + \operatorname{senh} b = 2 \operatorname{senh}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

10) $\cosh a + \cosh b = 2\cosh\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

11) $2\operatorname{senh}^2 \dfrac{x}{2} = \cosh x - 1$

12) $2\cosh^2 \dfrac{x}{2} = \cosh x + 1$

13) $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh}(nx) + \cosh(nx)$ (Fórmula de De Moivre)

Ejemplo 18. Un móvil describe un lugar geométrico dado por las ecuaciones $x = 2\sqrt{\cosh 2t} + 4$ e $y = \sqrt{6}\operatorname{senh} t - 1$. Determine el lugar geométrico.

Solución

Tenemos

$$\frac{(x-4)^2}{4} = \cosh 2t = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t \quad ... (1) \quad \wedge \quad \frac{(y+1)^2}{3} = 2\operatorname{senh}^2 t \quad ... (2)$$

Efectuando (1) – (2), se obtiene $\dfrac{(x-4)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$.

Luego, el lugar geométrico que describe el móvil es una hipérbola con centro en $(4; -1)$ y eje transverso sobre la recta $y = -1$.

www.FreeLibros.com

Ejemplo 19. Si $\tanh(\ln x) = -\dfrac{1}{2}$, halle el valor de x.

Solución

Se tiene

$$\tanh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

De la última igualdad, resulta $3x^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (pues $x > 0$).

EJERCICIOS

1) En cada uno de los siguientes ejercicios, calcule el valor de x si

a) $\operatorname{senh} x = \dfrac{4}{3}$ b) $\cosh x = \dfrac{5}{4}$; $x > 0$ c) $\tanh x = \dfrac{3}{4}$

d) $\coth x = 2$ e) $\operatorname{csch} x = -\dfrac{3}{4}$ f) $\coth x = -\dfrac{5}{2}$

2) Demuestre que:

a) $\tanh\left(\dfrac{A-B}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{senh} A - \operatorname{senh} B}{\cosh A + \cosh B}$ b) $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$

c) $\tanh(-x) = -\tanh x$ d) $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$

3) Demuestre que $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}(x+y)\operatorname{senh}(x-y)$.

4) Calcule el valor de x si

a) $\tanh(\ln x) = -\dfrac{1}{4}$ b) $\operatorname{senh}(\ln 2x) = \cosh(\ln x)$

9.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las fórmulas de derivación para las funciones hiperbólicas se deducen fácilmente aplicando las reglas de derivación a las funciones e^x y e^{-x}.

Así, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

La siguiente proposición presenta las derivadas de las funciones hiperbólicas.

Proposición 1. Las funciones hiperbólicas son derivables en sus correspondientes dominios. Se cumple:

a) $f(x) = \operatorname{senh} x$, entonces $f'(x) = \cosh x$

b) $f(x) = \cosh x$, entonces $f'(x) = \operatorname{senh} x$

c) $f(x) = \tanh x$, entonces $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$

d) $f(x) = \coth x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{csch}^2 x$

e) $f(x) = \operatorname{sech} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

f) $f(x) = \operatorname{csch} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Demostración (Ejercicio para el lector).

A continuación, se muestra la versión de la regla de la cadena para las funciones hiperbólicas.

Corolario 1. Sea $u = u(x)$ una función diferenciable. Entonces

a) $D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u \cdot D_x(u)$

b) $D_x(\cosh x) = \operatorname{senh} u \cdot D_x(u)$

c) $D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot D_x(u)$

d) $D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot D_x(u)$

e) $D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \cdot \tanh u \cdot D_x(u)$

f) $D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \cdot \coth u \cdot D_x(u)$

Corolario 2 (Límites Hiperbólicos)

i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{senh} x = 0$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \cosh x = 1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{x} = 1$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cosh x}{x} = 0$ vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cosh x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Demostración

i) y ii) son elementales.

Los límites iii) y vi) son de la forma $\frac{0}{0}$. Al aplicar la Regla de L'Hôpital, se tiene

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x}{1} = 1$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cosh x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{senh} x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 20. Si $f(x) = \ln(\operatorname{senh}(x^4))$, halle $f'(x)$.

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x^4)} \cdot [\operatorname{senh}(x^4)]' = \frac{4x^3 \cosh(x^4)}{\operatorname{senh}(x^4)} = 4x^3 \coth(x^4),\ x \neq 0$$

Ejemplo 21. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} n \operatorname{senh}\left(\frac{x}{n}\right)$, para $x \neq 0$.

Solución

Este límite es de la forma $0 \cdot \infty$. Al aplicar la Regla de L'Hôpital a la transformación correspondiente, se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{senh}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x \operatorname{senh}\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-x^2 n^{-2} \cosh\left(\frac{x}{n}\right)}{-xn^{-2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x \cosh\left(\frac{x}{n}\right) = x$$

Ejemplo 22. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh}^2 x \sqrt{x \tanh x}}{x^2 \sqrt{\cosh x - 1}}$.

Solución

Al aplicar límites hiperbólicos, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh}^2 x \sqrt{x \tanh x}}{x^2 \sqrt{\cosh x - 1}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{senh} x}{x}\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{\tanh x}{x}}{\frac{\cosh x - 1}{x^2}}} = (1)^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 23. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{20x^2}{1-\sqrt{\cosh x}}$.

Solución

Al aplicar límites hiperbólicos, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{20x^2}{1-\sqrt{\cosh x}} = \lim_{x\to 0} \frac{20x^2(1+\sqrt{\cosh x})}{1-\cosh x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 20\left(\frac{x^2}{1-\cosh x}\right)(1+\sqrt{\cosh x}) = 20(-2)(2) = -80$$

Ejemplo 24. Halle las asíntotas de $f(x) = \tanh x$.

Solución

Como $f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, se concluye:

a) **Asíntotas Verticales:** no tiene.

b) **Asíntotas Horizontales**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$

Por lo tanto, tiene dos asíntotas horizontales: $y = 1 \wedge y = -1$.

c) **Asíntotas Oblicuas:** no tiene.

Ejemplo 25. Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{\tanh x + \operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x - \tanh x}}$ $(x \neq 0)$ y

$$g(x) = \tanh\left[\ln\left(\frac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\right) + 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}\right)\right], \text{ halle}$$

a) $f'(x)$

b) $g'(0)$

Solución

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{\tanh x + \operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x - \tanh x}}} \cdot K$, donde

$$K = \frac{(\operatorname{senh} x - \tanh x)(\operatorname{sech}^2 x + \cosh x) - (\tanh x + \operatorname{senh} x)(\cosh x - \operatorname{sech}^2 x)}{(\operatorname{senh} x - \tanh x)^2}$$

Simplificando y usando las identidades hiperbólicas, se obtiene

$$f'(x) = -\frac{\tanh x}{\operatorname{senh} x - \tanh x}, \quad x \neq 0$$

b) $g'(x) = \dfrac{4\sqrt{2}}{1 + x^4}\operatorname{sech}^2\left[\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}\right)\right]$

Luego, $g'(0) = 4\sqrt{2}\operatorname{sech}^2(0) = 4\sqrt{2}$.

Ejemplo 26. Si $f(x) = \cosh(2x) - \operatorname{senh}^2 x$, halle $f^{(100)}(x)$.

Solución

$$f(x) = \cosh(2x) - \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x$$
$$f'(x) = 2\cosh x \operatorname{senh} x = \operatorname{senh} 2x$$
$$f''(x) = 2\cosh 2x$$
$$f'''(x) = 2^2 \operatorname{senh} 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cosh 2x$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^{n-1}\cosh 2x, & \text{si } n \text{ es par} \\ 2^{n-1}\operatorname{senh} 2x, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, $f^{(100)}(x) = 2^{99}\cosh 2x$.

Ejemplo 27. Si $f(x) = \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cosh^2 x})}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cosh^2 x}} \cdot \operatorname{senh}^2 x$, halle $f'(x)$.

Solución

Para todo $x \in D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, se tiene

$$f(x) = -(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cosh^2 x})^2$$
$$f'(x) = -\frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cosh^2 x})}{\sqrt{1 + \cosh^2 x}}(\operatorname{senh} x . \cosh x)$$
$$= -\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cosh^2 x})\operatorname{senh} 2x}{\sqrt{1 + \cosh^2 x}}$$

Ejemplo 28. Si $\sqrt{\dfrac{y + \operatorname{senh} x}{y - \operatorname{senh} x}} + \sqrt{\dfrac{y - \operatorname{senh} x}{y + \operatorname{senh} x}} = \sqrt{5}$, halle y''.

Solución

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\frac{y + \operatorname{senh} x}{y - \operatorname{senh} x} + \frac{y - \operatorname{senh} x}{y + \operatorname{senh} x} = 3$$

Luego, derivando implícitamente, se obtiene

$$y' = \frac{5\operatorname{senh}(2x)}{2y}$$
$$y'' = \frac{5\cosh(2x)}{y} - \frac{25\operatorname{senh}^2(2x)}{4y^3}$$

Ejemplo 29. Si $y = \operatorname{senh}^2 x$, halle la derivada de y respecto a $\dfrac{x - 1}{x + 1}$.

Solución

Haciendo $u = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ y aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{2\operatorname{senh} x \cosh x}{\frac{2}{(x + 1)^2}} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \operatorname{senh} 2x$$

www.FreeLibros.com

Ejemplo 30. Si $y = e^{(\cosh x)^{(\cosh x)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}$, halle y'.

Solución

Tomando logaritmo natural a ambos términos, obtenemos

$$\ln y = (\cosh x)^{(\cosh x)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$$

Como la nueva igualdad contiene función exponencial, se aplica de nuevo logaritmo a ambos términos para obtener

$$\ln(\ln y) = (\cosh x)^{(\cosh x)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}} \cdot \ln(\cosh x) = \ln y \cdot \ln(\cosh x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(\ln y) = \ln y \cdot \ln(\cosh x)$$

Derivando implícitamente la última igualdad, obtenemos

$$\frac{y'}{y \ln y} = \frac{y'}{y} \ln(\cosh x) + \ln y \cdot \tanh x$$

De lo anterior, se deduce que $y' = \dfrac{y \ln^2 y \tanh x}{1 - \ln y \cdot \ln(\cosh x)}$.

Ejemplo 31. Trace la gráfica de $f(x) = \tanh\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ e indique sus valores extremos y las ecuaciones de sus asíntotas.

Solución

i) $D_f = \langle -\infty; +\infty \rangle$

ii) **Asíntotas**: la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

iii) $f'(x) = \operatorname{sech}^2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \cdot \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Puntos críticos: $x = -1$ y $x = 1$.

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1 \rangle$	$-$	decreciente	$f(-1) \cong -0{,}462$ mín.
$\langle -1; 1 \rangle$	$+$	creciente	$f(1) \cong 0{,}462$ máx.
$\langle 1; +\infty \rangle$	$-$	decreciente	

La gráfica es simétrica respecto al origen. Ésta se muestra en la Fig. 9.8.

www.FreeLibros.com

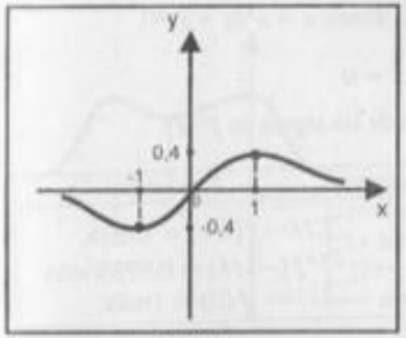


Fig. 9.8

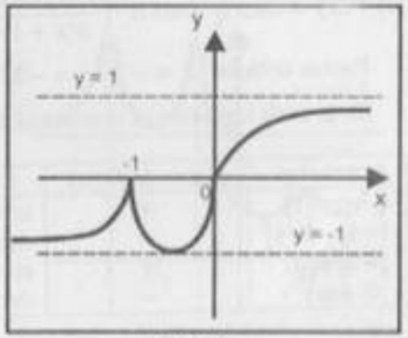


Fig. 9.9

Ejemplo 32. Determine los valores extremos y las asíntotas de la función

$$f(x) = \tanh\left[x^{1/3}(x+1)^{2/3}\right]$$

Solución

$f(x) = \tanh\left[x^{1/3}(x+1)^{2/3}\right] = \tanh\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}\right)$

i) $D_f = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ y $f(-1) = 0$

ii) **Asíntotas Horizontales:** $y = 1 \wedge y = -1$, pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm 1$

iii) $f'(x) = \operatorname{sech}^2\left[\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}\right] \cdot \dfrac{3x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$

Puntos críticos: $x = -1$, $x = -1/3$ y $x = 0$

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1 \rangle$	$+$	creciente	$f(-1) = 0$ máx.
$\langle -1; -1/3 \rangle$	$-$	decreciente	$f\left(-\frac{1}{3}\right) \cong -0{,}9197$ mín.
$\langle -1/3; 0 \rangle$	$+$	creciente	
$\langle 0; +\infty \rangle$	$+$	creciente	

La gráfica de la función se muestra en la Fig. 9.9.

Ejemplo 33. Dada $f(x) = \operatorname{sech}\left[x^2(1+x)^{2/3}\right]$, determine los valores extremos y las ecuaciones de sus asíntotas.

Solución

i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) $y = 0$ es la única asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

iii) $f'(x) = \operatorname{sech} u \cdot \tanh u \cdot \left(\frac{-2x(4x+3)}{3(x+1)^{1/3}}\right)$, donde $u = x^2(1+x)^{2/3}$

Puntos críticos: $x = -1$, $x = -3/4$ y $x = 0$

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1\rangle$	+	creciente	
$\langle -1; -3/4\rangle$	−	decreciente	$f(-1) = 1$ máx.
$\langle -3/4; 0\rangle$	+	creciente	$f(-3/4) = 0{,}9755$ mín.
$\langle 0; +\infty\rangle$	−	decreciente	$f(0) = 1$máx.

La gráfica se muestra en la Fig. 9.10.

Ejemplo 34. Estudie el crecimiento y los valores extremos de la función

$$f(x) = \cosh\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}\right)$$

Solución

i) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

ii) **Asíntotas Verticales**: $x = -2$, $x = -1$

Asíntota Horizontal: $y = \cosh(1) = 1{,}543$

iii) $f'(x) = \frac{6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)^2(x+1)^2} \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)}\right]$

Puntos críticos: $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -2\rangle$	+	creciente	
$\langle -2; -\sqrt{2}\rangle$	−	decreciente	$f(-\sqrt{2}) \cong 2{,}8 \times 10^{14}$ mín.
$\langle -\sqrt{2}; -1\rangle$	+	creciente	$f(1) = 1$ mín.
$\langle -1; 1\rangle$	−	decreciente	$f(\sqrt{2}) = 1{,}0004$ máx.
$\langle 1; \sqrt{2}\rangle$	+	creciente	$f(2) = 1$ mín.
$\langle \sqrt{2}; 2\rangle$	−	decreciente	
$\langle 2; +\infty\rangle$	+	creciente	

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 9.11.

www.FreeLibros.com

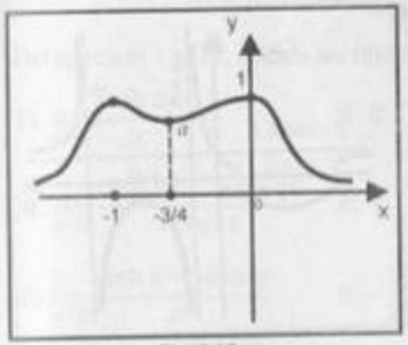


Fig. 9.10

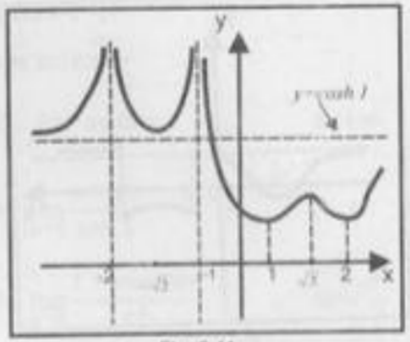


Fig. 9.11

Ejemplo 35. Determine los intervalos de crecimiento y los valores extremos de la función $f(x) = \tanh\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}\right)$

Solución

i) $D_f = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

ii) **Asíntota horizontal:** $y = \tanh(1)$. No tiene asíntotas verticales.

iii) $f'(x) = \frac{10(4-x^2)}{(x^2-5x+4)^2} \operatorname{sech}^2\left[\frac{(x+4)(x+1)}{(x-4)(x-1)}\right]$

Puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -2\rangle$	−	decrece	$f(-2) = \tanh\left(-\frac{1}{9}\right)$ mín.
$\langle -2; 1\rangle$	+	crece	
$\langle 1; 2\rangle$	+	crece	$f(2) = \tanh(-9)$ máx.
$\langle 2; 4\rangle$	−	decrece	
$\langle 4; +\infty\rangle$	−	decrece	

Para la gráfica (Fig. 9.12), se debe tener en cuenta que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = -1$$

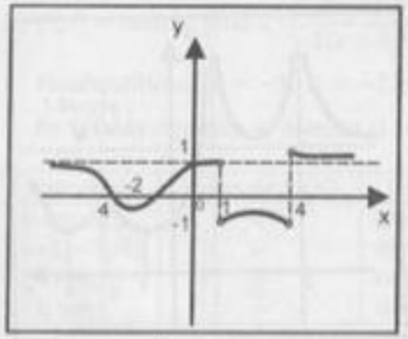


Fig. 9.12

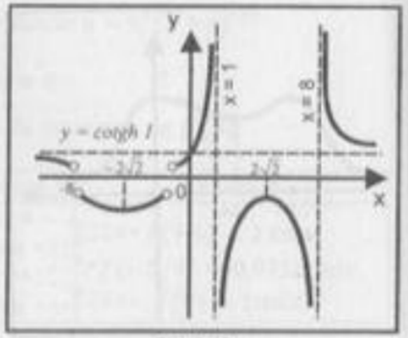


Fig. 9.13

Ejemplo 36. Determine las asíntotas, los valores extremos relativos y bosqueje la gráfica de $f(x) = \coth\left(\frac{x^2 - 9x + 8}{x^2 + 9x + 8}\right)$.

Solución

i) $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 8, \pm 1\}$

ii) **Asíntotas Verticales**: $x = 1$, $x = 8$

Asíntota Horizontal: $y = \coth(1)$, pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \coth(1)$.

También se observa que

$\lim_{x \to -8^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to -8^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$

iii) $f'(x) = -\frac{18(x^2 - 8)}{(x^2 + 9x + 8)^2} \cosh^2 \frac{(x - 1)(x - 8)}{(x + 1)(x + 8)}$

Puntos críticos: $x = -2\sqrt{2}$ y $x = 2\sqrt{2}$

En la tabla siguiente se muestra el análisis de los signos de $f'(x)$.

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$(-\infty; -8)$	$-$	decrece	
$(-8; -2\sqrt{2})$	$-$	decrece	En $x = -2\sqrt{2}$ hay mín.
$(-2\sqrt{2}; -1)$	$+$	crece	
$(-1; 1)$	$+$	crece	
$(1; 2\sqrt{2})$	$+$	crece	En $x = 2\sqrt{2}$ hay máx.
$(2\sqrt{2}; 8)$	$-$	decrece	
$(8; +\infty)$	$-$	decrece	

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 9.13.

www.FreeLibros.com

EJERCICIOS

Del ejercicio 1 al 18, calcule los límites que se indican.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} 8x}{x}$ R. 8

2) $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh} x$ R. $+\infty$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} 9x - \operatorname{senh} 5x}{x \cosh x}$ R. 4

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$ R. 1

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh x - \operatorname{senh} x}{x^3}$ R. $-\frac{1}{2}$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh ax}{x^2}$ R. $-\frac{a^2}{2}$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh(5x)}{1 - \cosh(7x)}$ R. $\frac{25}{49}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{senh} x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{senh} 2x)}$ R. $\frac{1}{8}$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{senh} 4x}{x + \operatorname{senh} 5x}$ R. $-\frac{1}{2}$

10) $\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{senh}(\pi - x)}{x(\pi - x)}$ R. $\frac{1}{\pi}$

11) $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{senh}(1 - x)}{\sqrt{x} - 1}$ R. -2

12) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\, x^2}{\tanh x \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sech} x}}$ R. 2

13) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh}^2 x \sqrt{x \tanh x}}{x^2 \sqrt{\cosh x - 1}}$ R. $\sqrt{2}$

14) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sech} x} - \sqrt{2}}{x \sqrt{\cosh x - 1}}$ R. $-\frac{1}{4}$

15) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{senh}^2 x} - \frac{1}{\cosh x - 1}\right)$ R. $-\frac{1}{2}$

16) $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{\cosh x} - \cosh x}{x^2}$ R. $-\frac{3}{4}$

17) $\lim_{x \to 0} (\cosh x)^{1/x^2}$ R. $e^{1/2}$

18) $\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{senh} x)^{\coth x}$ R. e

Del ejercicio 19 al 37, halle $y' = \frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas.

19) $y = \coth\left(\frac{1}{x}\right)$ R. $y' = \frac{1}{x^2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{1}{x}\right)$

20) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{senh} x^2)$

21) $y = \operatorname{sech}^2 x + 3 \operatorname{csch}^2 x$

22) $y = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{senh} x}}$

23) $y = \ln\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{\cos\left(\tanh\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}\right)\right]$

24) $y = \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\tanh^3\left(\frac{x}{2}\right)$ R. $y' = \frac{1}{4}\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2}\right)$

25) $y = \frac{1}{2}\tanh x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}\tanh x}{1-\sqrt{2}\tanh x}\right)$ R. $y' = \frac{1}{1-\operatorname{senh}^4 x}$

26) $y = \left(\frac{2}{\cosh^4 x} + \frac{3}{\cosh^2 x}\right)\operatorname{senh} x$ R. $y' = \frac{8}{\cosh^5 x} - \frac{3}{\cosh x}$

27) $y = \frac{\operatorname{senh} x \cdot \cosh x}{\sqrt{a\cosh^2 x + b\operatorname{senh}^2 x}}$

28) $y = \frac{a + b\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{a - b\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}$ R. $y' = \frac{ab}{\left(a\cosh\left(\frac{x}{2}\right) - b\operatorname{senh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$

29) $y = \frac{\operatorname{senh}(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\operatorname{senh}(a+b-c)x}{a+b-c} - \frac{\operatorname{senh}(a-b-c)x}{a-b-c} - \frac{\operatorname{senh}(a+b+c)x}{a+b+c}$

R. $y' = 4\cosh(ax)\cosh(bx)\cosh(x)$

30) $y = \frac{\operatorname{csch} x + \coth x}{\operatorname{csch} x - \coth x}$

31) $y = \operatorname{senh}(x - y)$

32) $\tanh y = 3x^2 + \tanh(x + y)$

33) $\coth(xy) + xy = 0$

34) $\cosh(x + y) = y\operatorname{senh} x$

35) $y = \operatorname{senh}(\cosh(x^2 + y^2))$

36) $y = \sqrt[3]{\operatorname{senh} x + \sqrt[3]{\operatorname{senh} x + \sqrt[3]{\operatorname{senh} x + \cdots\infty}}}$

37) $y = (\cosh x)^{(\cosh x)^{(\cosh x)^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$

38) Halle la derivada de $f(x) = \operatorname{senh}(\sqrt{x})$ respecto a $\left(\frac{x}{x^2} + 1\right)$.

39) Halle la derivada de $f(x) = \frac{1 - \cosh(\operatorname{senh} 3x)}{\operatorname{senh}^2(\operatorname{senh} 3x)}$ respecto a $\operatorname{senh}(3x)$.

40) Si $y = a\operatorname{senh}(\lambda x) + b\cosh(\lambda x)$, calcule el valor de k si

$k = \frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y.$ R. $k = 0$

41) Si $y = \frac{c - x^2}{\cosh x - x}$, halle el valor de k si

$k = (\cosh x - x)y' + y\operatorname{senh} x - y + 2x$ R. $k = 0$

42) Si $A = y'\coth x \cdot \cosh^2 x \ \wedge \ y = \sqrt{\tanh^2 x + \sqrt{\tanh^2 x + \sqrt{\tanh^2 x + \sqrt{\dots}}}}$, halle A.

43) Determine los valores extremos, los puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad y las asintotas de las siguientes funciones hiperbólicas.

a) $f(x) = \operatorname{senh} x$ b) $f(x) = \cosh x$ c) $f(x) = \tanh x$

d) $f(x) = \operatorname{sech} x$ e) $f(x) = \coth x$ f) $f(x) = \operatorname{csch} x$

Para cada una de las siguientes funciones, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores extremos. Además, bosqueje su gráfica indicando sus asintotas.

44) $f(x) = \tanh\left[x^{2/3}(x+1)^{2/3}\right]$

45) $f(x) = \coth(x^2 - 4)$

46) $f(x) = \tanh\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$

47) $f(x) = \cosh\left(\frac{x^2-10x+9}{x^2+10x+9}\right)$

48) $f(x) = \coth\left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$

49) $f(x) = \tanh\left(\frac{x^2-18x+32}{x^2+18x+32}\right)$

50) $f(x) = \operatorname{sech}\left[x(x+1)^{2/3}\right]$

51) $f(x) = \coth\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2-7x+10}\right)$

52) $f(x) = \operatorname{sech}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$

53) $f(x) = \operatorname{csch}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

54) $f(x) = \tanh\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

55) $f(x) = \tanh(x - \sqrt[3]{x^3+16})$

56) $f(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)$

57) $f(x) = \operatorname{sech}\left[(x+2)\sqrt{-x}\right]$

58) $f(x) = \tanh\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right]$

59) $f(x) = \operatorname{senh}\left[\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right]$

www.FreeLibros.com

9.5 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

En la sección anterior, hemos visto que las funciones hiperbólicas senh x, tanh x, coth x y csch x son inyectivas en sus dominios respectivos (por ser crecientes o decrecientes) y, por lo tanto, admiten función inversa.

Las funciones hiperbólicas cosh x y sech x no son inyectivas. Para hallar sus funciones inversas, se restringe el dominio al intervalo $[0; +\infty)$.

9.5.1 FUNCIÓN INVERSA DEL SENO HIPERBÓLICO

La función $f(x) = \text{senh}\, x$ es una función inyectiva y, por consiguiente, tiene función inversa, la cual se define como

$$y = f^{-1}(x) = \text{senh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ y } R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

La gráfica de $y = \text{senh}^{-1} x$ se muestra en la Fig. 9.14.

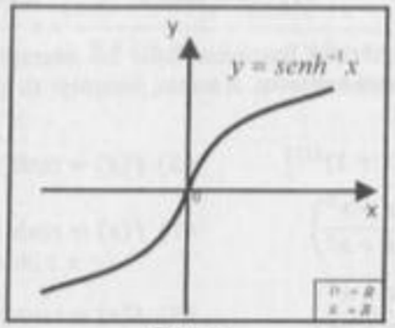


Fig. 9.14

9.5.2 FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO HIPERBÓLICO

En el caso de la función coseno hiperbólico, para definir su función inversa se restringe el dominio al intervalo $[0; +\infty)$, es decir,

$$f(x) = \cosh x\,,\ x \in [0; +\infty)$$

Su función inversa está definida por

$$y = f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$$

$$D_{f^{-1}} = [1; +\infty) \text{ y } R_{f^{-1}} = [0; +\infty)$$

La gráfica de $y = \cosh^{-1} x$ se muestra en la figura 9.15 (derecha).

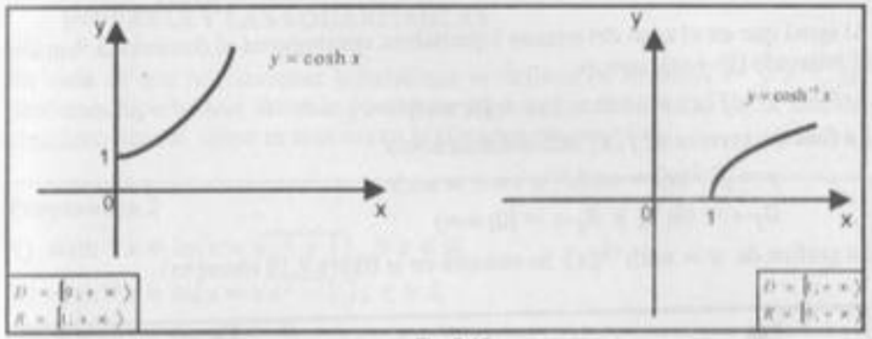


Fig. 9.15

9.5.3 FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA

La función $f(x) = \tanh x$ es inyectiva en todo su dominio y, por consiguiente, tiene una función inversa, que se define como

$$y = f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh(y)$$

$$D_{f^{-1}} = \langle -1; 1\rangle \text{ y } R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

La gráfica de $y = \tanh^{-1}(x)$ se muestra en la figura 9.16.

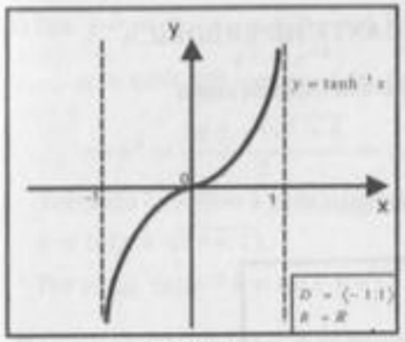


Fig. 9.16

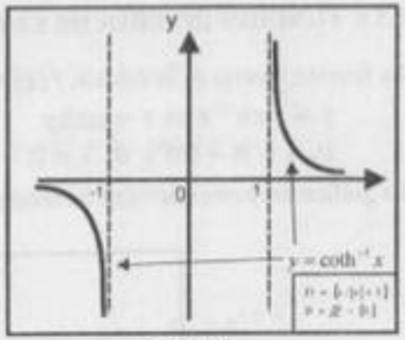


Fig. 9.17

9.5.4 FUNCIÓN INVERSA DE LA COTANGENTE HIPERBÓLICA

La función inversa de la función $f(x) = \coth x$ está definida como

$$y = f^{-1}(x) = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty) \text{ y } R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

La gráfica de $y = \coth^{-1}(x)$ se muestra en la figura 9.17.

www.FreeLibros.com

9.5.5 FUNCIÓN INVERSA DE LA SECANTE HIPERBÓLICA

Al igual que en el caso del coseno hiperbólico, restringimos el dominio la función al intervalo $[0;+\infty)$, esto es,

$$y = f(x) = \operatorname{sech} x \ , \ x \in [0;+\infty)$$

La función inversa de $f(x)$ está definida como

$$y = f^{-1}(x) = \operatorname{sech}^{-1}x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$$

$$D_{f^{-1}} = \langle 0;1] \ \text{y} \ R_{f^{-1}} = [0;+\infty)$$

La gráfica de $y = \operatorname{sech}^{-1}(x)$ se muestra en la figura 9.18 (derecha).

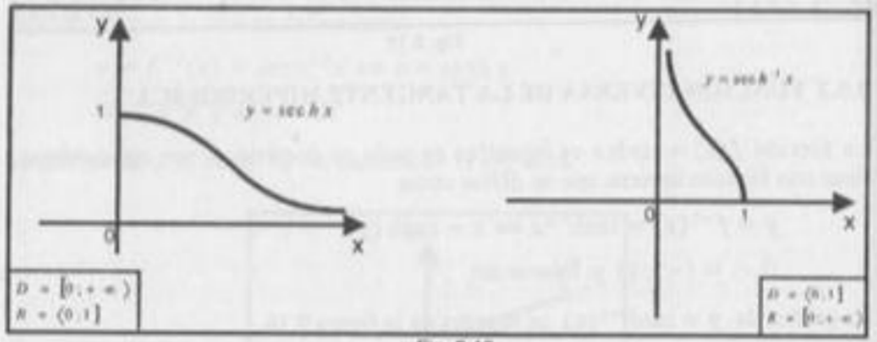


Fig. 9.18

9.5.6 FUNCIÓN INVERSA DE LA COSECANTE HIPERBÓLICA

La función inversa de la función $f(x) = \operatorname{csch} x$ está definida como

$$y = \operatorname{csch}^{-1}x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\} \ \text{y} \ R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

La gráfica de $y = \operatorname{csch}^{-1}(x)$ se muestra en la figura 9.19.

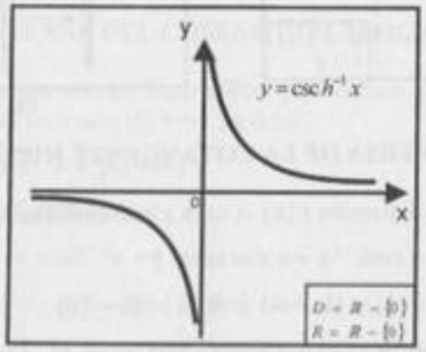


Fig. 9.19

9.6 RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS Y LAS LOGARÍTMICAS

En vista de que las funciones hiperbólicas se definen en términos e^x y e^{-x}, las funciones hiperbólicas inversas pueden ser expresadas en términos de la función logaritmo natural, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2

1) $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \ x \geq 1$

3) $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ |x| < 1$

4) $\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \ |x| > 1$

5) $\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \ 0 < x \leq 1$

6) $\operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right), \ x \neq 0$

Demostración

1) Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Entonces, por definición, tenemos

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}, \ \text{pues } e^y > ($$

Tomando logaritmo a ambos términos de la última igualdad, obtenemos

$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Por tanto, $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

3) $y = \tanh^{-1}x$, con $|x| > 1 \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

Por tanto, $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

La verificación de las otras propiedades queda como ejercicio para el lector.

www.FreeLibros.com

9.7 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Proposición 3. Las funciones hiperbólicas inversas son derivables. Se cumple:

a) $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x) = \cosh^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$

c) $f(x) = \tanh^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$

d) $f(x) = \coth^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$

e) $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$

f) $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}(x)$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$

Demostración

a) Como $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Para demostrar esta propiedad también se puede usar derivación implícita y proceder de manera similar a la efectuada para las funciones trigonométricas inversas. La demostración de las otras propiedades queda como ejercicio para el lector.

Corolario. Sea $u = u(x)$ es una función diferenciable de x. Entonces

a) $D_x(\operatorname{senh}^{-1}u) = \dfrac{D_x(u)}{\sqrt{u^2+1}}$

b) $D_x(\cosh^{-1}u) = \dfrac{D_x(u)}{\sqrt{u^2-1}}$, $u > 1$

c) $D_x(\tanh^{-1}u) = \dfrac{D_x(u)}{1-u^2}$, $|u| < 1$

d) $D_x(\coth^{-1}u) = \dfrac{D_x(u)}{1-u^2}$, $|u| > 1$

e) $D_x(\operatorname{sech}^{-1}u) = -\dfrac{D_x(u)}{u\sqrt{1-u^2}}$, $0 < u < 1$

f) $D_x(\operatorname{csch}^{-1}u) = -\dfrac{D_x(u)}{|u|\sqrt{1+u^2}}$, $u \neq 0$

Ejemplo 37. Si $f(x) = \coth^{-1}(e^{x^2-4})$, halle

a) Dom(f) b) $f'(x)$ c) Dom(f')

Solución

a) $\text{Dom}(f) = \{x \ / \ e^{x^2-4} > 1\} = \{x \ / \ x^2 - 4 > 0\} = \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

b) $f'(x) = \dfrac{2xe^{x^2-4}}{1-e^{2x^2-8}}$

c) $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f)$

Ejemplo 38. Si $f(x) = \coth^{-1}(\operatorname{sen} 6x)$ y $g(x) = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} 6x)$, halle, si existen: $f'(x)$, Dom(f'), $g'(x)$ y Dom(g').

Solución

i) Como $|\operatorname{sen} 6x| \leq 1$, entonces $Dom(f) = \emptyset$. Luego, no existe f ni f'.

ii) $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |\operatorname{sen} 6x| < 1\}$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 6x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

iii) $g'(x) = \dfrac{6\cos 6x}{1 - \operatorname{sen}^2 6x} = 6 \sec 6x$

$\text{Dom}(g') = \text{Dom}(g)$

Ejemplo 39. Sea $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$, $a > 0$.

a) Determine Dom(f) b) Halle $f'(x)$ y determine Dom(f')

Solución

a) $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} < 1\right\} = [-\sqrt{2}a; -a\rangle \cup \langle a; \sqrt{2}a]$

b) $f'(x) = -\dfrac{ax}{(x^2-a^2)\sqrt{2a^2-x^2}}$ y $\text{Dom}(f') = \langle -\sqrt{2}a; -a\rangle \cup \langle a; \sqrt{2}a\rangle$

Ejemplo 40. Sea $f(x) = x\sqrt{x^2+c^2} + c^2 \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{x}{c}\right)$, $c > 0$.

a) Determine Dom(f) b) Halle $f'(x)$ y determine Dom(f')

Solución

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

www.FreeLibros.com

b) $f'(x) = \sqrt{x^2+c^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+c^2}} + c^2 \dfrac{1/c}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2+1}}$

Luego, $f'(x) = 2\sqrt{x^2+c^2}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

Ejemplo 41. Si $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{1/6} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, halle $f'(x)$.

Solución

$$f(x) = \frac{1}{6}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Luego de aplicar las reglas de derivación y de simplificar la expresión, se obtiene

$$f'(x) = -\frac{x^2}{3(x^4-3x^2+2)}$$

Ejemplo 42. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh^{-1}x}{e^{2x}-1}$.

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh^{-1}x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x^2}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 43. Sea $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2-11x+10}{x^2+11x+10}\right)$.

Halle sus asíntotas, sus valores extremos y esboce su gráfica

Solución

i) $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \left|\dfrac{x^2-11x+10}{x^2+11x+10}\right| < 1\right\} = \langle 0; +\infty\rangle$

ii) Como $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2-11x+10}{x^2+11x+10}\right)$, entonces $f(1) = f(10) = 0$.

Se observa que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, pues $\lim\limits_{u\to 1^-}\tanh^{-1}(u) = +\infty$.

Por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical.

No tiene asíntotas oblicuas ni horizontales.

iii) $f'(x) = \dfrac{x^2-10}{2x(x^2+10)}$. El único punto crítico de f es $x = \sqrt{10}$.

www.FreeLibros.com

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle 0; \sqrt{10}\rangle$	$-$	decrece	$f(\sqrt{10}) \cong 0{,}2767$ mín.
$\langle \sqrt{10}; +\infty\rangle$	$+$	crece	

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 9.20.

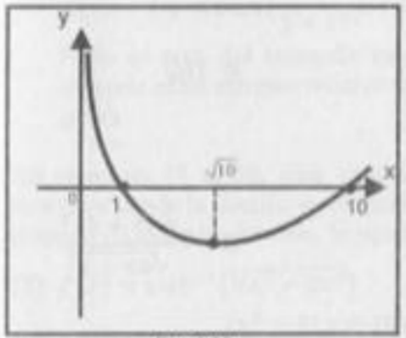


Fig. 9.20

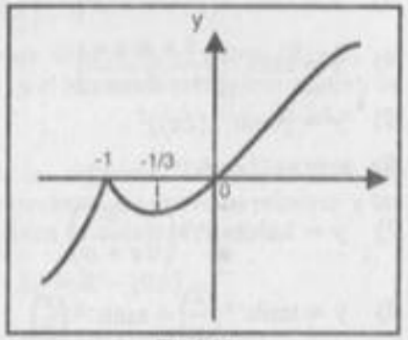


Fig. 9.21

Ejemplo 44. Sea $f(x) = \text{senh}^{-1}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x})$.

a) Halle $\text{Dom}(f)$.

b) Determine los valores extremos de f.

c) Esboce la gráfica de f.

Solución

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \dfrac{3x+1}{3(x+1)^{1/3}x^{2/3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+(x^3+2x^2+x)^{2/3}}}$

Puntos críticos: $x = -1$, $x = -1/3$ y $x = 0$.

El análisis de los signos de $f'(x)$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento	Extremos
$\langle -\infty; -1\rangle$	$+$	crece	$f(-1) = 0$ máx.
$\langle -1; -1/3\rangle$	$-$	decrece	
$\langle -1/3; 0\rangle$	$+$	crece	$f(-1/3) = \text{senh}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ mín.
$\langle 0; +\infty\rangle$	$+$	crece	

c) La gráfica se muestra en la figura 9.21.

EJERCICIOS

Del ejercicio 1 al 13, halle $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las funciones que se indican.

1) $y = \operatorname{senh}^{-1}(e^x) + \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $y = \operatorname{senh}^{-1}(\ln x) + \ln(\tanh^{-1}(x))$

3) $y = \tanh^{-1}\left[2^{\log_2(5x^2+2)}\right]$

4) $y = \tanh^{-1}\left[\dfrac{3 + sen\, x}{4 - 5\cos x}\right]$ R. $10x$

5) $y = [\operatorname{senh}^{-1}(2x)]^2$

6) $y = xe^{-x}\cosh^{-1}(1 - x)$

7) $y = 3a^2\tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{x}{x + a}}\right)$ R. $-\dfrac{6ax + 4x^2}{\sqrt{ax + x^2}}$

8) $y = \tanh^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right) + \tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

9) $y = a\cosh^{-1}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) + \sqrt{x^2 - 2ax}$, $a > 0$

10) $y = \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, $a > 0$

11) $y = \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{2 - \sqrt{2x}} + \cosh^{-1}(\sqrt{2 - \sqrt{2x}})$

12) $\tanh^{-1}(x + y) = \dfrac{1}{3}[\tanh^{-1}(x) + \tanh^{-1}(y)]$

13) $\tanh^{-1}x + x\cosh^{-1}y = \operatorname{senh}^{-1}(x + y)$

14) La gráfica de $x = \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{\dfrac{a^2}{y^2} - 1} - \sqrt{a^2 - y^2}$ $(a > 0)$ se llama tractriz.

Demuestre que la pendiente a la curva en cualquier punto $(x; y)$ es $-\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

15) Dadas las funciones

$f(x) = -2 + \tanh(x - 1)$, $g(x) = 4 - \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{1 + x^2}\right) + \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

$h(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) - 2$ y $j(x) = 4 + \operatorname{senh}^{-1}(x + 2)$.

Halle el área del rectángulo tal que su primer vértice es el punto de inflexión de $f(x)$, el segundo es el punto de máximo relativo de $g(x)$, el tercero es el punto de extremo relativo de $h(x)$ y el cuarto es el punto de inflexión de $j(x)$. R. $18\ u^2$

16) Dadas las funciones

$f(x) = -3 + \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 10x + 9}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ y

$g(x) = 4 + \arctan\left(\dfrac{x}{1 + x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Halle el área del triángulo cuyo primer vértice es el punto $(1; -3)$, el segundo es un extremo relativo de $f(x)$ y el tercero es el máximo relativo de $g(x)$. R. $14\ u^2$

Del ejercicio 17 al 36, para cada una de las siguientes funciones, halle los intervalos donde la función es creciente o decreciente, los extremos relativos y las asíntotas (si existen). Además, bosqueje la gráfica de cada una de ellas.

17) $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2})$ $D_f = \mathbb{R} - \{0,6\}$

18) $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}\left(\dfrac{x^2 - 11x + 10}{x^2 + 11x + 10}\right)$ $D_f = [0; 1\rangle \cup \langle 10; +\infty\rangle$

19) $f(x) = \coth^{-1}\left(\dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 + 8x + 12}\right)$ $D_f = \langle -\infty; 0\rangle - \{-6, -2\}$

20) $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}\right)$ $D_f = \langle -\infty; -\sqrt{10}\rangle \cup \langle \sqrt{10}; +\infty\rangle$

21) $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x})$ $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

22) $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}\left(\dfrac{x^2 - 11x + 10}{x^2 + 11x + 10}\right)$ $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm 10\}$

23) $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{2|x|}{1 + x^2}\right)$ $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

24) $f(x) = \cosh^{-1}\left(\dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 10x + 9}\right)$ $D_f = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$

25) $f(x) = \coth^{-1}(x^2)$ $D_f = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

26) $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(e^{-\sqrt{x^2 - 9}})$ $D_f = \langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty\rangle$

27) $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}(e^{x^3 + 4x^2 - x - 4})$ $D_f = \langle -\infty; -4] \cup [-1; 1]$

28) $f(x) = \cosh^{-1}\dfrac{(x - 3)^{\frac{2}{3}}(x + 2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$ $D_f = \left[1 - 2\sqrt{2}; 2\right] \cup \left[1 + 2\sqrt{2}; +\infty\right\rangle$

www.FreeLibros.com

29) $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(x^3(x+4)^{1/3})$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

30) $f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(x^x)$ $\qquad D_f = (0; +\infty)$

31) $f(x) = \tanh^{-1}(x^x)$ $\qquad D_f = (0; 1)$

32) $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^2-4}{32}}\right)$ $\qquad D_f = [-6; -2] \cup [2; 6]$

33) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{senh}^{-1}\left[(x+2)^{3/5}(x-7)^{2/5}\right], & x \leq -2 \\ \operatorname{senh}\left[(x+2)^2(x-4)^{2/3}\right], & -2 < x < 4 \\ \cosh^{-1}\left[(x-4)^{1/5}(x-9)^{4/5}+1\right], & 4 \leq x \leq 9 \\ \tanh^{-1}\left[\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+10x+9}\right], & x > 9 \end{cases}$

34) $f(x) = (\operatorname{senh} x)^{\operatorname{senh} x}$

35) $f(x) = (\cosh x)^{\cosh x}$

36) $f(x) = \begin{cases} (x+7)^{3/5}(x-6)^{2/5}, & x \leq -7 \\ \arctan\left[(x+7)^2(x+1)^{1/3}\right], & -7 < x \leq -1 \\ \operatorname{senh}\left[(x+1)^{3/5}(x-1)^{2/5}\right], & -1 < x < 1 \\ 5^{\operatorname{senh}^{-1}\left[(x-1)^3(x-6)^{2/3}\right]} - 1, & 1 \leq x \leq 6 \\ \tanh\left[e^{(x-6)^{3/5}(x+6)^2}\right], & x > 6 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, halle los límites que se indican.

37) $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{e^{x^2}\ln(\coth x)}{(8-x)e^{\operatorname{csch} x}} - \dfrac{xe^x}{1-e^x}\right]$

38) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\tanh^{-1}(2-x)[\ln(3-x)]^{2/3}(1-\cos\sqrt{2-x})}{\tan(2-x)[\operatorname{arcsen}(2-x)^{4/3}](x-2)^{1/3}} \cdot \left[\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{e^{x-2}-1}\right]$

39) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(e^{x-1}-1)^{1/3}(\operatorname{senh}((x-1)^{2/3})) \cdot \arctan(1-x)^{5/3}(1-x)^{4/3}}{[\cos(x-1)^{2/3}-1] \cdot \operatorname{arcsen}(1-x)^{4/3}[\ln(2-x)]^{1/3} \cdot \tanh 2(1-x)}$

40) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\ln\left[(3-x)^{3/4}\right] \cdot \operatorname{arcsen}(2-x)^{1/2} \cdot \left[1-\cos(2-x)^{5/8}\right]}{\tan(2-x)^{5/4} \cdot \operatorname{senh}\left[2(2-x)^{1/8}\right] \cdot \left[e^{2-x}-1\right]^{9/8}} \cdot \left(\dfrac{2}{2-x} - \dfrac{1}{e^{x-2}-1}\right)$

41) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{18\left[\pi - 2\arccos(x+2)^{-2}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\pi\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)\right]}{\left[1-\sqrt{\cos\left[\pi(x+2)^{-2}\right]}\right]\left[1-\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2\right]}\left(\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\left[(x+2)^{-2}\right]} - \dfrac{1}{1-\cos(x+2)^{-2}}\right)$

42) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left[(x+1)^{-1}\right] \cdot \left(1-\cos\left[(x+1)^{-1/2}\right]\right) \cdot \tanh\left[\operatorname{sen}(x+1)^{-3/8}\right] \cdot \ln\left[1+3\operatorname{sen}(x+1)^{-1/3}\right]}{\left[e^{2\operatorname{sen}(x+1)^{-5/8}}\right] \cdot \tan\left[2\operatorname{sen}(x+1)^{-1/12}\right] \cdot \arctan\left[3(x+1)^{-2/3}\right] \cdot \ln\left[1+(x+1^{-4/3}\right]}$

www.FreeLibros.com

10 FUNCIONES PARAMÉTRICAS

10.1 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA CURVA

Sean f, g dos funciones continuas definidas en I, $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$. Las ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I \ \ldots \ (1)$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** y t se llama **parámetro**.

Si se considera que los valores de x e y son las coordenadas de un punto en el plano coordenado xy, a cada valor de t le corresponde el punto $P(f(t); g(t))$ del plano xy (Fig. 10.1). Cuando t varía en I, este punto describe una curva.

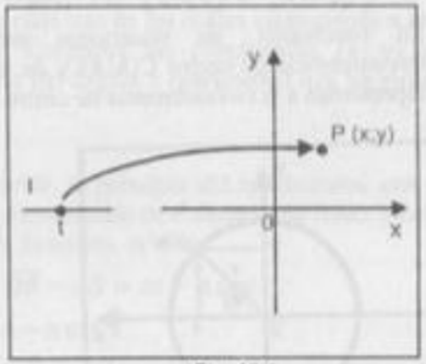


Fig. 10.1

Supongamos que $x = f(t)$ tiene inversa $t = f^{-1}(x)$. Entonces y es función de x, pues

$$y = g(f^{-1}(x))$$

En este caso, y está en función de x y se dice que la función se representa en forma paramétrica por (1).

Para expresar y en términos de x, es necesario eliminar el parámetro t de las ecuaciones (1). Al eliminar el parámetro (si es posible), obtendremos una ecuación de la forma $y = h(x)$ ó de la forma $E(x; y) = 0$.

El dominio de una ecuación paramétrica, si no se indica, se determina por

$$I = \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$$

Ejemplo 1. Elimine el parámetro t de las siguientes ecuaciones paramétricas y obtenga la correspondiente ecuación cartesiana.

a) $\begin{cases} x = h + r\cos t \\ y = k + r\,\text{sen}\,t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$ (Circunferencia)

b) Si $|a| \neq |b|$

$\begin{cases} x = h + a\cos t \\ y = k + b\,\text{sen}\,t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$ (Elipse)

c) $\begin{cases} x = h + a\cosh t \\ y = k + b\,\text{senh}\,t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (Hipérbola)

d) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (Parábola)

Solución

a) Tenemos $x - h = r\cos t \wedge y - k = r\,\text{sen}\,t$, $t \in [0; 2\pi]$. Entonces

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) = r^2$$

En conclusión, las ecuaciones paramétricas dadas representan una circunferencia de centro $C(h; k)$ y de radio $|r|$. En particular, si $h = k = 0$, representan a la circunferencia de centro en el origen y de radio $|r|$ (Fig. 10.2).

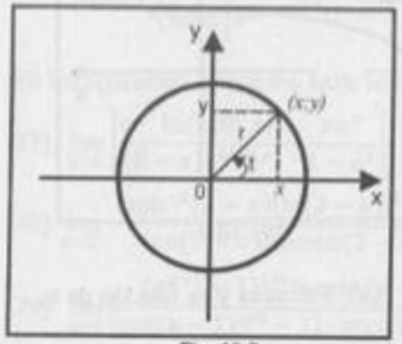


Fig. 10.2

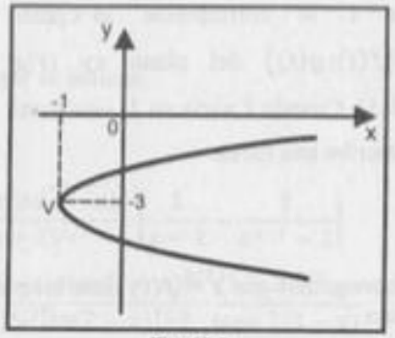


Fig. 10.3

b) Procediendo de manera similar al ejemplo anterior, se obtiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Esta ecuación representa a una elipse de centro $C(h;\ k)$ y semiejes $|a|$ y $|b|$.

c) Del mismo modo, $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (Hipérbola de centro $C(h; k)$).

d) Como $t = x - 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$

(Parábola de vértice $V(0; 1)$)

Ejemplo 2. Trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t - 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Solución

Los valores de x e y para los valores dados de t se muestran en la tabla siguiente.

t	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3	−4	−5	...
x	0	3	8	15	24	35	−1	0	3	2	15	...
y	−2	−1	0	1	2	3	−3	−4	−5	−6	−7	...

La gráfica es una parábola de vértice $V(-1,;-3)$ (Fig. 10.3) y su ecuación cartesiana es $x = y^2 + 6y + 8$.

Ejemplo 3.

Cuando una circunferencia de radio a rueda sin resbalar sobre una línea recta, la curva descrita por un punto fijo en la circunferencia se llama cicloide. Esta curva está formada por una sucesión de arcos, cada uno de los cuales corresponde a una vuelta completa de la circunferencia. Encuentre las coordenadas $(x;\ y)$ de cualquier punto de la cicloide en función del ángulo t (parámetro) que ha girado la circunferencia.

Solución

Supongamos que F (el punto fijo) coincide, al principio del movimiento, con el origen de coordenadas. Sean $(x;\ y)$ las coordenadas de F después de haber girado la circunferencia un ángulo t (Fig. 10.4). Entonces, se tiene

$$FB = \overline{OB} \Rightarrow \overline{OB} = at\,;\ x = \overline{OB} - AB = at - a\,\text{sen}\,t$$

$$y = AF = \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = a - a\cos t$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\,t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Cuando $0 \leq t \leq 2\pi$, el punto F describe un arco de la cicloide.

Ejemplo 4.

Si una cuerda que está enrollada alrededor de una circunferencia (fija) de radio a comienza a desenrollarse de tal manera que la cuerda siempre se mantenga tirante y en el mismo plano de la circunferencia, entonces el extremo libre de la cuerda describe una curva llamada involuta de la circunferencia. Halle las ecuaciones paramétricas de la involuta de la circunferencia de radio a.

www.FreeLibros.com

Solución

Consideremos la circunferencia de radio a y centro en $(0;0)$.
Sea $A(a;0)$ el extremo libre de la cuerda (Fig. 10.5). Entonces

$\overline{NP} = AN = at$, $\overline{OM} = a\cos t$, $\overline{MN} = a \operatorname{sen} t$, $\overline{CP} = \overline{NP} \operatorname{sen} t = at \operatorname{sen} t$ y $\overline{CN} = \overline{NP}\cos t = at\cos t$.

Luego, se tiene

$$x = \overline{OM} + \overline{CP} = a\cos t + at \operatorname{sen} t$$
$$y = \overline{MN} - \overline{CN} = a \operatorname{sen} t - at\cos t$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la involuta de la circunferencia de radio a son:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

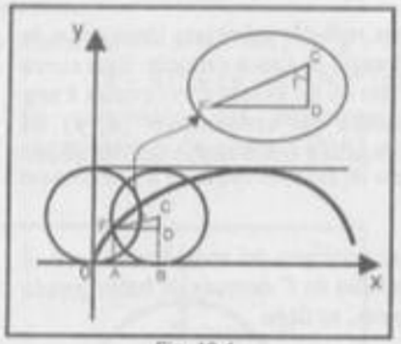


Fig. 10.4

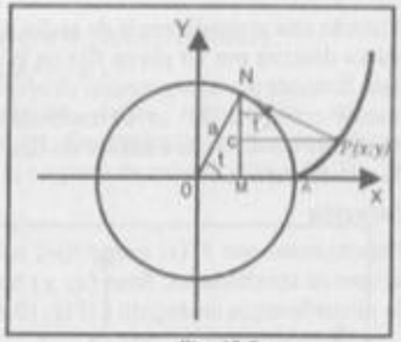


Fig. 10.5

Definición 1

Se dice que una curva dada en ecuaciones paramétricas presenta **un lazo** (es decir, se interseca a sí misma) si a dos valores $t_1 \neq t_2$ les corresponde un mismo punto P (Fig. 10.6).

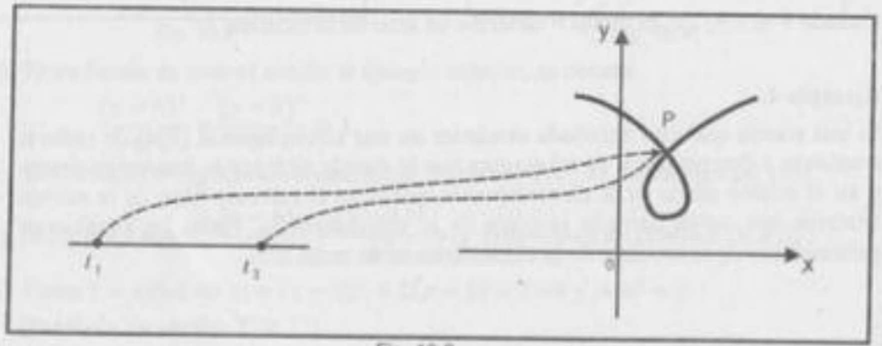


Fig. 10.6

Ejemplo 5. Halle las coordenadas cartesianas del punto en el cual la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^3 + 2t^2 \wedge y = t^3 - t$, $t \in \mathbb{R}$ presenta un lazo.

Solución.

Sean a y b dos valores distintos del parámetro t para los cuales se tiene el mismo valor para x e y. Entonces

$$\begin{cases} x = a^3 + 2a^2 \\ y = a^3 - a \end{cases} \wedge \begin{cases} x = b^3 + 2b^2 \\ y = b^3 - b \end{cases}$$

Luego, $a^3 + 2a^2 = b^3 + 2b^2 \wedge a^3 - a = b^3 - b$

$$\Leftrightarrow a^3 - b^3 + 2(a^2 - b^2) = 0 \wedge a^3 - b^3 - (a - b) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b) = 0 \wedge$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$$

Como $a \neq b$, se tiene

$$a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0 \qquad (2)$$
$$a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

De (2) – (3) se tiene: $2a + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -a - \frac{1}{2}$ ... (4)

Reemplazando (4) en (2), se tiene

$$a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{13})$$

Si $a_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{13}) \Rightarrow x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{16}$

Si $a_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{13}) \Rightarrow x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{16}$

Por tanto, el lazo se corta en el punto $P\left(\frac{9}{8}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{16}\right)$.

10.2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DADA EN SU FORMA PARAMÉTRICA

Supongamos que la representación paramétrica de una curva es

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ t \in I$$

donde f y g son funciones derivables en I y $f'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Aplicando la regla de cadena, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

www.FreeLibros.com

Para obtener la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$, se aplica nuevamente la regla de la cadena. De este modo, tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]}{f'(t)}=\frac{f'(t)\cdot g''(t)-g'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

En general, se tiene $\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]}{\frac{dx}{dt}}$.

Ejemplo 6. Encuentre la ecuación cartesiana de las rectas tangente y normal a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x=t^2+1 \wedge y=t^3+2t$, en el punto donde $t=-2$.

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2}{2t}$$

La pendiente es $m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-2}=\frac{14}{-4}=-\frac{7}{2}$

Para $t=-2$, el punto de tangencia es $P(5;-12)$ y las ecuaciones de las rectas tangente y normal son

$$L_T: 7x+2y-11=0 \text{ y } L_N: 2x-7y-94=0$$

Observación 1.

Para trazar la gráfica de una curva dada en su forma paramétrica, se debe tener en cuenta las siguientes estrategias:

1) *Determinar los números críticos para t, es decir, los valores $t_1, t_2, t_3, \ldots$ para los cuales por lo menos una de las derivadas $f'(t)$ ó $g'(t)$ se anulan o no existen.*

2) *Mediante la fórmula $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$, se halla el signo de la derivada en cada uno de los intervalos $\langle t_1;t_2\rangle, \langle t_2;t_3,\rangle, \ldots$, etc. De esta manera, quedan determinados los intervalos de crecimiento.*

3) *Mediante la fórmula $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{(f'(t))^3}$, se determina la concavidad en cada intervalo de la recta.*

4) *Si existe t_0 para el cual $\frac{dx}{dt}=0$, entonces hay una recta tangente vertical a la gráfica en el punto correspondiente a t_0 (siempre que en ese punto $\frac{dy}{dt}\neq 0$)*

5) *Para hallar las asíntotas verticales y horizontales, debemos determinar los valores de t en cuyas proximidades x ó y tienden al infinito.*

Ejemplo 7. Trace la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases},\quad a>0$$

Solución

Dado que las funciones periódicas $\cos^3 t$ y $\mathrm{sen}^3 t$ tienen periodo 2π, será suficiente considerar la variación del parámetro t en $[0;2\pi]$.

Luego, $[-a;a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y. Por lo tanto, la curva no tiene asíntotas horizontales.

Se cumple:

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t,\quad \frac{dy}{dt}=3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t$$

Estas derivadas se reducen a cero cuando $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$, $t=\frac{3\pi}{2}$ y $t=2\pi$.

Además, $\frac{dy}{dx}=-\tan t$.

El análisis de los signos de $\frac{dy}{dx}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y=h(x)$
$\langle 0;\pi/2\rangle$	$\langle 0;a\rangle$	$\langle 0;a\rangle$	$-$	decreciente
$\langle \pi/2;\pi\rangle$	$\langle -a;0\rangle$	$\langle 0;a\rangle$	$+$	creciente
$\langle \pi;3\pi/2\rangle$	$\langle -a;0\rangle$	$\langle -a;0\rangle$	$-$	decreciente
$\langle 3\pi/2;2\pi\rangle$	$\langle 0;a\rangle$	$\langle -a;0\rangle$	$+$	creciente

Por otro lado, $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\infty$ y $\lim_{t\to\frac{3\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\infty$.

Luego, en los puntos correspondientes a $t=\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{3\pi}{2}$, la tangente a la curva es vertical.

www.FreeLibros.com

Además: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2\pi} = 0.$

Luego, en los puntos correspondientes a $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la tangente es horizontal.

La segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t \operatorname{sen} t}$$

Esta segunda derivada se reduce a cero en

$$t = 0,\ t = \frac{\pi}{2},\ t = \pi,\ t = \frac{3\pi}{2}\ \text{ y }\ t = 2\pi$$

El análisis de los signos de $\frac{d^2x}{dx^2}$ se ilustra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Signo de $\frac{d^2x}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$(0; \pi/2)$	+	$\cup$
$(\pi/2; \pi)$	+	$\cup$
$(\pi; 3\pi/2)$	−	$\cap$
$(3\pi/2; 2\pi)$	−	$\cap$

La gráfica de la curva se llama astroide y se muestra en la Fig. 10.7. Su ecuación cartesiana es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

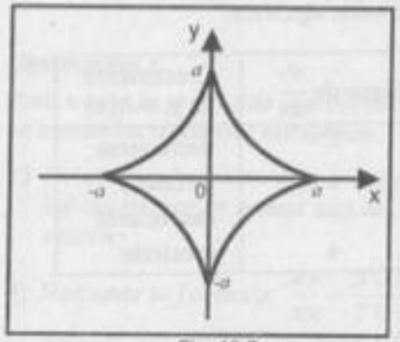


Fig. 10.7

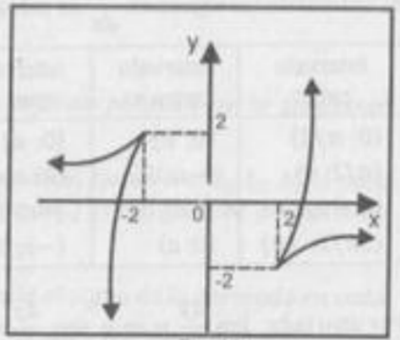


Fig. 10.8

www.FreeLibros.com

Ejemplo 8. Trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = t + \frac{1}{t} \ \wedge\ y = t^3 - 3t$$

Solución

i) Dom $= \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

ii) **Asíntotas verticales:** no tiene (pues no existe ningún valor de t para el cual $x \to a \wedge y \to \pm\infty$)

Asíntotas horizontales: $y = L$ es asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = L$.

Como $x \to +\infty$ cuando $t \to +\infty \vee t \to 0^+$, entonces se tiene

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{t\to 0^+} y = 0$$

Luego, $y = 0$ es asíntota horizontal a la derecha.

Para el caso en que $t \to +\infty$, no existe asíntota horizontal.

Análogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{t\to 0^-} y = 0$$

Luego, $y = 0$ es asíntota horizontal a la izquierda.

No tiene asíntotas oblicuas, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = +\infty$.

iii) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3 \ \wedge\ \frac{dy}{dx} = 3t^2$

Puntos críticos: $t = 0$, $t = \pm 1$.

El análisis de los signos de $\frac{dy}{dx}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1\rangle$	$\langle -\infty; -2\rangle$	$\langle -\infty; 2\rangle$	+	crece
$\langle -1; 0\rangle$	$\langle -\infty; -2\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	+	crece
$\langle 0; 1\rangle$	$\langle 2; +\infty\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	+	crece
$\langle 1; +\infty\rangle$	$\langle 2; +\infty\rangle$	$\langle -2; +\infty\rangle$	+	crece

iv) No tiene tangentes verticales ni horizontales, pues

$\frac{dy}{dx} \to \pm\infty$ si $t \to \pm\infty$, y cuando $t \to \pm\infty$, $x \to \pm\infty$

$\frac{dy}{dx} \to 0$ si $t \to 0$, y cuando $t \to 0$, $x \to \infty$

v) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6t^3}{t^2 - 1}$

Puntos críticos de inflexión: $t = -1$, $t = 0$ y $t = 1$.

El análisis de los signos de $\dfrac{d^2x}{dx^2}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalos para t	Signo de $\dfrac{d^2x}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1\rangle$	$-$	$\cap$
$\langle -1; 0\rangle$	$+$	$\cup$
$\langle 0; 1\rangle$	$-$	$\cap$
$\langle 1; +\infty\rangle$	$+$	$\cup$

La gráfica de la curva se muestra en la figura 10.8.

Ejemplo 9. Mediante la primera derivada, trace la gráfica de la curva dada por

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \ \wedge\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (a > 0)$$

Solución

i) Dominio: $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$

ii) Asintotas.

a) No tiene asintotas verticales ni horizontales, pues ninguno de los limites siguientes se ajustan a su definición.

$$\lim_{t\to -1^-} x = +\infty \ \wedge\ \lim_{t\to -1^-} y = -\infty$$

$$\lim_{t\to -1^+} x = -\infty \ \wedge\ \lim_{t\to -1^+} y = +\infty$$

$$\lim_{t\to 0} x = 0 \ \wedge\ \lim_{t\to 0} y = 0$$

$$\lim_{t\to \pm\infty} x = 0 \ \wedge\ \lim_{t\to \pm\infty} y = 0$$

b) Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to -1^-} t = -1$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (y - mx) = \lim_{x\to +\infty} (y + x) = \lim_{t\to -1^-} \frac{3at}{1 - t + t^2} = -a$$

Luego, la recta $y = -x - a$ es asintota oblicua cuando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1^+} t = -1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (y - mx) = \lim_{x\to -\infty} (y + x) = \lim_{t\to -1^+} \frac{3at}{1 - t + t^2} = -a$$

Luego, la recta $y = -x - a$ es también asintota oblicua cuando $x \to -\infty$.

www.FreeLibros.com

iii) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t(t^3-2)}{2t^3-1}$

Puntos críticos: $t = 0$, $t = \sqrt[3]{1/2}$ y $t = \sqrt[3]{2}$.

El análisis de los signos de $\dfrac{dy}{dx}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\dfrac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1\rangle$	$\langle 0; +\infty\rangle$	$\langle -\infty; 0\rangle$	$-$	decrece
$\langle -1; 0\rangle$	$\langle -\infty; 0\rangle$	$\langle 0; +\infty\rangle$	$-$	decrece
$\langle 0; \sqrt[3]{1/2}\rangle$	$\langle 0; a\sqrt[3]{4}\rangle$	$\langle 0; a\sqrt[3]{2}\rangle$	$+$	crece
$\langle \sqrt[3]{1/2}; \sqrt[3]{2}\rangle$	$\langle a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4}\rangle$	$\langle a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4}\rangle$	$-$	decrece
$\langle \sqrt[3]{2}; +\infty\rangle$	$\langle 0; a\sqrt[3]{2}\rangle$	$\langle 0; a\sqrt[3]{4}\rangle$	$+$	crece

Como $\dfrac{dy}{dx} = 0$ cuando $t = 0$ y $t = \sqrt[3]{2}$, entonces en los puntos $P_1(0;0)$ (correspondiente a $t = 0$) y $P_2(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$ (correspondiente a $t = \sqrt[3]{2}$), la tangente a la recta es horizontal.

Por otro lado, $\dfrac{dy}{dx} \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y $t \to \sqrt[3]{1/2}$. Entonces, en los puntos $P_1(0;0)$ (correspondiente a $t \to \infty$) y $P_3(a\sqrt[3]{4}; a\sqrt[3]{2})$ (correspondiente a $t \to \sqrt[3]{1/2}$, la tangente a la curva es vertical.

Luego, la curva pasa dos veces por $P_1(0;0)$: una vez con la tangente horizontal igual al eje x y otra con la tangente vertical igual al eje y.

La gráfica se muestra en la figura 10.9.

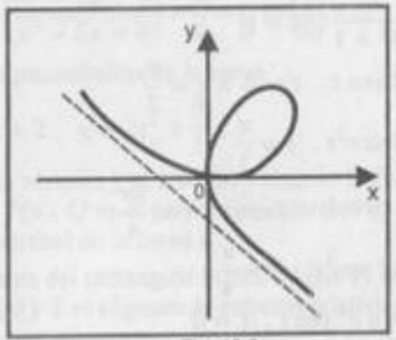


Fig. 10.9

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios del 1 al 10, dibuje la gráfica de la curva en cada caso y elimine el parámetro para obtener su ecuación cartesiana.

1) $x = 2t\,,\ y = 3t - 4$

2) $x = t^2 + 1\,,\ y = \dfrac{1}{t}$

3) $x = 3\sqrt{t-2}\,,\ y = 2\sqrt{4-t}$

4) $x = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\,,\ y = \dfrac{3t}{1+t^3}$

5) $x = \dfrac{20t}{4+t^2}\,,\ y = \dfrac{5(4-t^2)}{4+t^2}$

6) $x = e^t\,,\ y = e^{-t}$

7) $x = 3\operatorname{sen}\theta\,,\ y = 5\cos\theta$

8) $x = 4\sec\theta\,,\ y = 3\tan\theta$

9) $x = 3\operatorname{sen}t\,,\ y = 4\tan t\sec t$

10) $x = 2\tanh t\,,\ y = 3\operatorname{sech}t$

En los ejercicios del 11 al 24, obtenga $D_x y$, $D_y x$, $D_x^2 y \wedge D_y^2 x$.

11) $x = (t+1)^2\,,\ y = (t-1)^3$

12) $x = e^{-t^2}\,,\ y = te^{t^2}$

13) $x = t - \operatorname{sen}t\,,\ y = (t-\pi)^2$

14) $x = t^2\,,\ y = t^3 + 2t$

15) $x = 4\cos t\,,\ y = 2\operatorname{sen}^2 t$

16) $x = 2\cosh t\,,\ y = \operatorname{senh}t$

17) $x = \cosh t\,,\ y = te^{-t}$

18) $x = e^t + \cos t\,,\ y = e^t - \operatorname{sen}t$

19) $x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta\,,\ y = a - a\cos\theta$

20) $x = \sqrt{1-t^2}\,,\ y = \operatorname{arcsen}t$

21) $x = t - \tanh t\,,\ y = \operatorname{sech}t$

22) $x = e^{2t} + 1\,,\ y = 1 - e^{-t}$

23) $x = t^2 - t\,,\ y = t^3 - 3t$

24) $x = t^2(t-2)\,,\ y = t(t-2)^2$

En los siguientes ejercicios, hasta el N° 32, halle las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro que se indica.

25) $x = t^2 + 1\,,\ y = t^3 + 2t\,,\ t = -2$

26) $x = \dfrac{3t}{t^3+1}\,,\ y = \dfrac{3t^2}{t^3+1}\,,\ t = 0$

27) $x = 4\cos t\,,\ y = 2\operatorname{sen}t\,,\ t = 0 \wedge t = \dfrac{\pi}{2}$

28) $x = 4\cos t\,,\ y = 2\operatorname{sen}^2 t\,,\ t = \dfrac{\pi}{3}$

29) $x = 3\operatorname{sen}(t) - 4\,,\ y = 5 + 2\cos t\,,\ t = \dfrac{5\pi}{4}$

30) $x = 3\cos^3\theta\,,\ y = 3\operatorname{sen}^3\theta\,,\ t = \dfrac{\pi}{4}$

31) $x = a\,e^t\cos t\,,\ y = a\,e^t\operatorname{sen}t\,,\ t = 0$

32) $x = a(1-\operatorname{sen}t)\,,\ y = a(1-\cos t)\,,\ t = \dfrac{\pi}{4} \wedge t = \pi$

En los siguientes ejercicios, hasta el N° 40, trace la gráfica de cada una de las curvas dadas de forma paramétrica.

33) $x = t^2|t|\,,\ y = \operatorname{senh}^3 t$

34) $x = t^{2/3}\,,\ y = (t^2+t)^{1/3}$

35) $x = t - \tanh t\,,\ y = \operatorname{sech}t$

36) $x = \dfrac{\cos t}{t}\,,\ y = \dfrac{\operatorname{sen}t}{t}$

37) $x = \dfrac{1}{t}\,,\ y = \ln|t|$

38) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}\,,\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

39) $x = \dfrac{t+1}{t-1}\,,\ y = \dfrac{1}{t}$

40) $x = t^2 - 2t\,,\ y = t^3 - 12t$

41) Dadas las funciones

$f(x) = \operatorname{senh}^3(\sqrt[3]{x-3}) - 1\,,\ \ h(x) = \arctan(x+6) - 1$ y

$g(x) = 2 - \tanh^{-1}\left(\dfrac{9+x+x^2}{9-x+x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln 6$

y las ecuaciones paramétricas de la curva

$C\!: x = \dfrac{6t}{1-t^3}\,,\ y = \dfrac{6t^2}{t^3-1}$

a) Halle las asíntotas oblicuas de la curva C.

b) Halle el área del trapecio isósceles con bases paralelas al eje x, de manera que el primer vértice es el punto de inflexión de $h(x)$, el segundo es el punto de extremo relativo de $g(x)$, el tercero está sobre la asíntota oblicua de la curva C y es punto de extremo de $f(x)$, y el cuarto es un punto que está sobre la asíntota oblicua de C.

42) Dadas las funciones

$f(x) = -2 + \tanh(x-1)\,,\ g(x) = 4 - \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) + \operatorname{arcot}\left(\dfrac{1}{2}\right),$

$h(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}\right) - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) - 2$

y las ecuaciones paramétricas de la curva

$C\!: x = t^2 + 4t + 2\,,\ y = 2t^2 + \dfrac{8}{t}$

a) Determine los vértices y el área del triángulo PQR, donde P es el punto de inflexión de $f(x)$, Q es el punto máximo relativo de $g(x)$ y R es el punto de tangente vertical de la curva C.

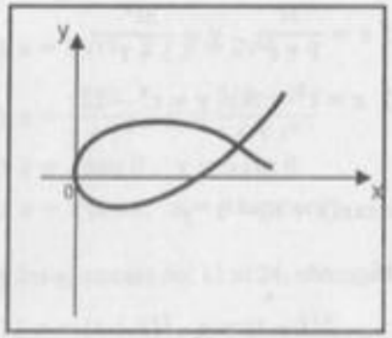
b) ¿Cuál es el área del rectángulo PQRS tal que P, Q y R están determinados por la parte (a) y S es el punto de extremo relativo de $h(x)$?

R. (a) $9u^2$ (b) $18u^2$

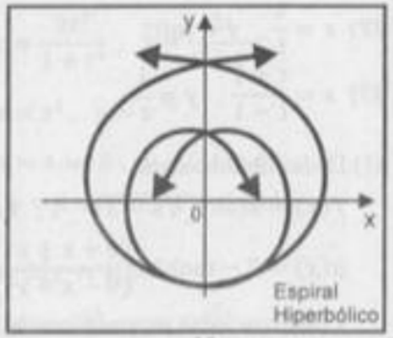
www.FreeLibros.com

43) Halle las asíntotas de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

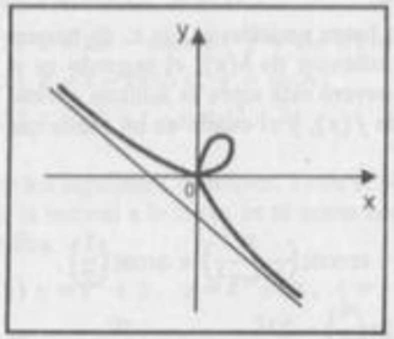
$$x = \frac{2t}{1+(1-t)^3}, \quad y = \frac{2t^2}{1+(1-t)^3}$$



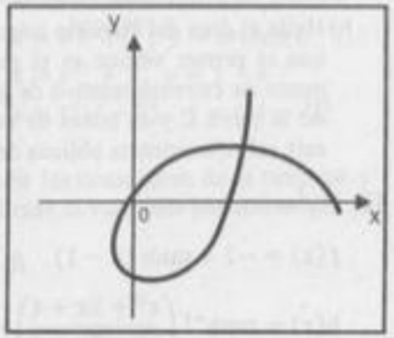
34



36



38



40

www.FreeLibros.com